Príklady na Hornovu logiku

1 Definitný logický program

Definitný logický program (DLP) P je množina definitných kláuz. Definitná klauza je implikácia r tvaru $L \leftarrow L_1, \ldots, L_n$, kde $n \geq 0$ a L, L_i sú atómy. Značíme:

$$head(r) = L$$
$$body(r) = \{L_1, \ldots, L_n\}$$

Implikáciám hovoríme tiež pravidlá.

Atóm (term) je *základný* ak neobsahuje premennú.

Herbrandovská báza programu P je množina všetkých základných atómov B_P, ktoré možno vytvoriť z predikátových symbolov a termov v programe P. *Herbrandovská interpretácia* programu P je ľubovoľná (teda aj prázdna) podmnožina B_P. Herbrandovská interpretácia I je *modelom* programu P ak spĺňa všetky pravidlá v P.

$Ground(P)$ je program, ktorý vznikne z programu P tak, že všetky premenné postupne nahradíme všetkými základnými termami v programe P, všetkými možnými spôsobmi.

Príklad 1. *Majme nasledovný DLP P*

$$\begin{aligned} edge(a,b) &\leftarrow \\ edge(b,c) &\leftarrow \\ path(X,Y) &\leftarrow edge(X,Y) \\ path(X,Z) &\leftarrow path(X,Y), path(Y,Z) \end{aligned}$$

Potom a, b, c sú konštanty, X, Y, Z sú premenné a $edge, path$ sú predikátové symboly. Herbrandovská báza programu P je množina $B_P = \{edge(a,a), edge(a,b), edge(a,c), edge(b,a), edge(b,b), edge(b,c), edge(c,a), edge(c,b), edge(c,c), path(a,a), path(a,b), path(a,c), path(b,a), path(b,b), path(b,c), path(c,a), path(c,b), path(c,c)\}$

Ak program P obsahuje funkčný symbol, B_P bude nekonečná množina.

Príklad 2. *Uvažujme teraz takýto DLP P*

$$\begin{aligned} edge(a,b) &\leftarrow \\ path(X,Z) &\leftarrow path(X,Y), path(Y,Z) \end{aligned}$$

$Ground(P)$ je nasledovný program

$$\begin{aligned} edge(a,b) &\leftarrow \\ path(a,a) &\leftarrow path(a,a), path(a,a) \\ path(a,b) &\leftarrow path(a,a), path(a,b) \\ path(a,a) &\leftarrow path(a,b), path(b,a) \\ path(a,b) &\leftarrow path(a,b), path(b,b) \\ path(b,a) &\leftarrow path(b,a), path(a,a) \\ path(b,b) &\leftarrow path(b,a), path(a,b) \\ path(b,a) &\leftarrow path(b,b), path(b,a) \\ path(b,b) &\leftarrow path(b,b), path(b,b) \end{aligned}$$

Majme DLP P, T_P je operátor odvodenia nad herbrandovskou bázou B_P definovaný nasledovne

$$T_P(I) = \{A \in B_P \mid \exists r \in Ground(P), head(r) = A \wedge body(r) \subseteq I\}$$

Teda T_P dostane herbrandovskú interpretáciu a vráti herbrandovskú interpretáciu.

Úloha 1. *Ktoré z nasledovných vlastností T_P spĺňa? Dokážte alebo nájdite kontrapríklad.*

- *reflexívnosť*
- *slabá idempotentnosť*
- *zachovávanie konzistetnosti*
- *monotónnosť*
- *kumulatívnosť*

Úloha 2. *Ukážte, že T_P je korektný vzhľadom na program P v tomto zmysle:*

Ak I je modelom programu $P \cup J$, kde $J \subseteq B_P$, potom I je aj modelom $T_P(J)$.

Najmenší model programu P sa značí M_P.

Úloha 3. *Majme program*

$$\begin{aligned} p &\leftarrow q \\ b &\leftarrow a \\ q &\leftarrow \end{aligned}$$

Nájdite jeho všetky herbrandovské modely. Ktorý z nich je najmenší?

Úloha 4. *Nasledovné vety formalizujte v jazyku DLP. Použite dve konštanty na pomenovanie mojej mačky a mňa. Predikátové symboly si zvoľte podľa potreby.*

Vtáky majú radi červíkov. Mačky majú radi ryby. Pritelia sa majú navzájom radi. Moja mačka mi je priateľom. Moja mačka žerie všetko čo má rada.

Čo z týchto viet vyplýva, že moja mačka žerie? Pomocou iterácie T_P operátora nájdite najmenší model.

Úloha 5. *Dokážte, že najmenší pevný bod operátora T_P je najmenší model programu P.*

2 Hornov logický program

Integritné obmedzenie je klauza $\neg L_1 \vee \ldots \vee \neg L_n$, kde $n \geq 1$ a L_i sú atómy. Integritné obmedzenie sa v logickom programovaní značí $\leftarrow L_1, \ldots, L_n$.

Ľubovoľnú triedu logického programovania môžeme rozšíriť o integritné obmedzenia. DLP, obohatený o integritné obmedzenia, sa nazýva Hornov logický program.

Hornova klauza je klauza s najviac jedným pozitívnym literálom.

Hornov logický program (HLP) je množina hornových kláuz.

Označenia *head*, *body*, $Ground(P)$, B_P sa aplikujú aj na HLP.

Herbrandovská interpretácia I spĺňa integritné obmedzenie $\leftarrow L_1, \ldots, L_n$ ak $\{L_1, \ldots, L_n\} \not\subseteq I$. Herbrandovská interpretácia I spĺňa HLP P ak spĺňa všetky pravidlá a integritné obmedzenia.

Príklad 3. *Nasledovný program P je HLP*

$$\begin{aligned} muz(jano) &\leftarrow \\ zena(alena) &\leftarrow \\ clovek(X) &\leftarrow muz(X) \\ clovek(X) &\leftarrow zena(X) \\ &\leftarrow muz(X), zena(X) \end{aligned}$$

Akonáhle rozšírime ľubovoľný logický program o integritné obmedzenia, existencia modelov už nie je zaručená.

Úloha 6. *Napíšte HLP program, ktorý demonštruje to, že hornove logické programy nemusia mať model.*

Úloha 7. *Len pomocou predikátových symbolov parne, neparne, konštanty* 0 *a funkčného symbola nasledovníka S napíšte HLP program, ktorý*

a) definuje párne kladné čísla,

b) definuje nepárne kladné čísla,

c) tvrdí, že žiadne číslo nie je súčasme párne aj nepárne,

d) tvrdí, že číslo je párne, ak jeho nasledovník je nepárne,

e) tvrdí, že číslo je nepárne, ak jeho nasledovník je párne,

f) tvrdí, že číslo je párne, ak jeho predchodca nepárne a číslo je nepárne, ak jeho predchodca je párne.

Programy skonštruujte tak, aby množina všetkých kladných párnych (nepárnych) čísel sa „rovnala“množine všetkých termov najmenšieho modelu programu v a) (b)).

Úloha 8. *Nasledovné vety formalizujte v jazyku HLP. Nepoužite žiadne konštanty ani funkčné symboly.*

Žiaden drak, ktorý žije v zoo, nie je šťastný. Každé zviera, ktoré sa stretáva s milími ľuďmi, je šťastné. Ľudia, ktorí navštevujú zoo, sú milí. Zvieratá, ktoré žijú v zoo sa stretávajú s ľuďmi, ktorí ju navštevujú.

Doplňte ďalšie predpoklady, nutné k tomu, aby z programu vyplývalo, že žiaden drak nežije v zoo.

Úloha 9. *Formalizujte nasledovné vety v HLP (niektoré z nich sú dvojznačné. V tom prípade formalizujte obidve varianty.):*

a) Každý má rád niekoho.

b) Každý má rád každého.

c) Niekto má rád každého.

d) Nikto nemá rád nikoho.

e) Nikto nemá rád niekoho.

f) Niekto nemá rád nikoho.

g) John a Marry sa majú radi.

h) Učiteľ je šťastný ak nie je v žiadnej komisii. (parafrázujte: nie je pravda, že učiteľ je šťastný a patrí do nejakej komisii)

i) Každý, kto vie niečo o logike, ju má rád.

3 Operátor odvodenia nad Hornovým logickým programom

Atóm A vyplýva z HLP programu P, $P \models A$, ak každý model P spĺňa A.

Úloha 10. *$P \models A$ práve vtedy keď $A \in M_P$. Dokážte.*

Úloha 11. *Uvažujme program P*

$$\begin{aligned} p(a,b) &\leftarrow \\ p(c,b) &\leftarrow \\ p(X,Z) &\leftarrow p(X,Y), p(Y,Z) \\ p(Y,X) &\leftarrow p(X,Y) \end{aligned}$$

Ukážte, že $P \models p(a,c)$ a akonáhle nejaké pravidlo r z P odstránime, $P \setminus \{r\} \not\models p(a,c)$.

Zadefinujme si operátor odvodenia Cn_P pre HLP program P nad herbrandovskou bázou B_P ako

$$\mathrm{Cn}_P(I) = \{A \in B_P \mid P \cup I \models A\}$$

Úloha 12. *Ktoré z vlastností Cn_P spĺňa? Dokážte alebo nájdite kontrapríklad.*

- *reflexívnosť*
- *slabá idempotentnosť*
- *zachovávanie konzistetnosti*
- *monotónnosť*
- *kumulatívnosť*

Úloha 13. *Ukážte, že Cn_P je korektný vzhľadom na program P v tomto zmysle:*

Ak I je modelom programu $P \cup J$, kde $J \subseteq B_P$, potom I je aj modelom $Cn_P(J)$.