Príklady na operátory odvodenia

1 Vlastnosti operátora

Množina formúl je *konzistentná* ak pre ňu existuje model.
Majme nejaký jazyk J a množinu formúl $E \subseteq J$ nad týmto jazykom. *Operátor odvodenia* Cn nad jazykom J je funkcia $\mathrm{Cn}\colon \mathcal{P}(J) \longrightarrow \mathcal{P}(J)$. Hovoríme, že Cn je:

reflexívny ak pre všetky $E \subseteq J$, $E \subseteq \mathrm{Cn}(E)$,

slabo idempotentný ak pre všetky $E \subseteq J$, $\mathrm{Cn}(\mathrm{Cn}(E)) \subseteq \mathrm{Cn}(E)$,

zachováva konzistentnosť ak pre všetky $E \subseteq J$, E je konzistentné implikuje $\mathrm{Cn}(E)$ je konzistentné,

korektný ak pre všetky $E \subseteq J$ a všetky interpretácie I, $I \models E$ implikuje $I \models \mathrm{Cn}(E)$,

slabo korektný ak pre všetky konzistentné $E \subseteq J$, pre všetky konzistentné formuly $\phi \in \mathrm{Cn}(E)$, je $E \cup \{\phi\}$ konzistentné,

monotónny ak pre všetky $D, E \subseteq J$, $D \subseteq E$ implikuje $\mathrm{Cn}(D) \subseteq \mathrm{Cn}(E)$.

Množina formúl E je uzavretá na operátor odvodenia Cn ak $\mathrm{Cn}(E) = E$.

2 $\mathbf{Cn}_{FOL}$

Úloha 1. *Ukážte, že operátor odvodenia Cn_{FOL} nad jazykom prvorádovej logiky J_{FOL}, definovaný ako $Cn_{FOL}(X) = \{\phi \in J_{FOL} \mid X \models \phi\}$, je* deduktívny uzáver*. Tzn., spĺňa reflexívnosť, slabú idempotentnosť, monotónnosť.*

Úloha 2. *Ukážte, že pre formulu $\phi \in J_{FOL}$, množinu formúl $T \subseteq J_{FOL}$ a deduktívny uzáver Cn_{FOL} platí:*

- *$\phi \notin Cn_{FOL}(T)$ práve vtedy keď existuje taká interpretácia I, že $I \models T$ a $I \not\models \phi$.*
- *$Taut = Cn_{FOL}(\emptyset)$, kde $Taut$ je množina všetkých tautológií v jazyku J_{FOL}.*
- *$Taut \subseteq Cn_{FOL}(T)$.*
- *pre T uzavretú na dedukciu (operátor Cn_{FOL}) platí:*
  - *ak $\phi, \phi \to \psi \in T$, potom $\psi \in T$.*
  - *ak $\phi \in T$ a $\phi \to \psi$ je tautológia, potom $\psi \in T$.*
  - *$\phi \wedge \psi \in T$ práve vtedy keď $\phi, \psi \in T$.*
- *pre systém množín formúl uzavretých na dedukciu $\mathcal{T}$, jej prienik $\bigcap \mathcal{T}$ je množina formúl uzavretá na dedukciu.*
- *pre ľubovoľnú interpretáciu I je množina formúl $\{\phi \in J_{FOL} \mid I \models \phi\}$ uzavretá na dedukciu.*

3 CWA

Predpoklad uzavretého sveta, CWA, je operátor odvodenia nad jazykom J definovaný ako

$$\mathrm{CWA}(E) = \{\neg\phi \mid \phi \text{ je atóm z jazyka } J, E \not\models \phi\}$$

Úloha 3. *Uvažujme operátor odvodenia Cn_1 nad jazykom prvorádovej logiky J_{FOL}, definovaný ako*

$$Cn_1(E) = E \cup CWA(E).$$

Pre každú z vlastností zo sekcie 1 rozhodnite, či ju Cn_1 spĺňa (zdôvodnite) alebo nie (ukážte kontrapríklad).

Uvažujme výrokový (pre jednoduchosť) jazyk definitných kláuz definovaný nasledovne:

atóm A je výroková premenná z nejakej vopred určenej množiny At,

literál L je atóm A (*pozitívny* literál) alebo jeho negácia $\neg A$ (negatívny literál),

klauza C je disjunkcia literálov $L_1 \vee \ldots \vee L_n$, $n \geq 1$

definitná klauza D je klauza s práve jedným pozitívnym literálom.

Príklad 1. *Majme atómy $\{p, q_1, \ldots, q_k\}$. Potom $p \vee \neg q_1 \vee \ldots \vee \neg q_k, q_1 \vee \neg q_1, p$ sú príklady definitných kláuz.*

Úloha 4. *Uvažujme operátor odvodenia Cn_1 definovaný rovnako ako v úlohe 3, tentoraz však nad jazykom definitných kláuz. Ukážte, že Cn_1 konzistentnosť teraz zachováva.*

Príklad 2. *Majme množinu atómov $At = \{a, b\}$ a množinu definitných kláuz $E = \{a, b \vee \neg a\}$. Keďže $CWA(E) = \emptyset$, E je uzavretá na operátor Cn_1 (platí $E = Cn_1(E)$).*

Úloha 5. *Príklad 2 ukázal, že operátor Cn_1 nespĺňa jednu peknú vlastnosť, ktorú by sme požadovali od deduktívnej databázy – Cn_1 nie je uzavretý na dedukciu: v E sme mali $a, a \to b$, avšak $b \notin Cn_1(E)$. To znamená, že operátor Cn_1 nie je vhodná špecifikácia pre inferenčnú mašinu deduktívnej databázy. Navrhnite nový operátor Cn_2 (modifikovaním Cn_1), ktorý bude „robiť to isté", čo Cn_1, len bude navyše uzavretý na dedukciu.*