Original article by David Baraff and Andrew Witkin - 1998

Prezentuje Karol Vanko, v skupine s Lukášom Riškom a Milanom Vrškovým

LARGE STEPS IN CLOTH SIMULATION

Fyzikálna simulácia látky

Úvod

- Motivácia
- Základná definícia
  - Problém deformácie povrchu a aplikovanie mechanických elementov
- Hlavné problémy doterajšieho vývoja
  - Veľké časové kroky
- Predošlý prístup
  - Spoločné : formulácia ako časovo závislá parciálna diferenciálna rovnica
  - Odlišné : reprezentácia, riešenie numerických problémov, obmedzenia..

Úvod

- Rovnica

$$\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{M}^{-1}\left(-\frac{\partial E}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{F}\right).$$

- Explicitná versus impliticná integrácia
  - Obmedzenia, výhody
- Definícia nového simulačného systému
  - Implicitná integrácia, priame obmedzenia, trojuholníková sieť, vlastné vnútorné sily, riešenie pomocou upravenej metódy conjugate gradient method, zjednotený systém pre damping forces, riešenie lineárnych systémov

Specific Contributions

- Implicitné integrovanie
  - Priame riadenie kontaktných a geometrických obmedzení
  - Presadzovanie bez postihov funkcie energie
- Upravený iteratívny algoritmus conjugate gradient method
  - Na riešenie lineárnych systémov
- Kombinácia implicitnej integrácie a priamych obmedzení
  - Možnosť zväčšiť časové kroky
  - Dynamická adaptácia časových krokov

Prehľad simulácie
Notácia a geometria

- Trojuholníková sieť častíc
- Stav častíc
  - Pozícia častice – ***x***, sila ***f***
  - Priestorové koordináty
- Skutočná látka
- Kolízie
  - Cloth vs solid,
  - Cloth vs cloth
  - Steny majú pridelený parameter hrúbky

Prehľad simulácie
Energia a sily

- Vnútorné sily charakterizujú správanie materiálu
- **Shearing** a **bending** force
- **Stretch** force
- Komplementovaním získame **damping** forces
  - Na potlačenie monotónnej oscilácie pri pohybe
- Dodatočné sily
  - Airdrag, gravitácia, definovaná používateľom
- Odpudzujúce sily
  - Časti obmedzení, generované napríklad pri kontakte
- Vektor ***f***, akcelerácia vektor ***x***, hmotnosť ***m***, matica hmotností ***M***

$$\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}).$$

Prehľad simulácie
Constraints

- Pozícia a rýchlosť častíc
- Kontrolovanie v 1/2/3 dimenziách
- Automatické alebo generované používateľom
  - Napr. penalizačná sila pri kolízií látka vs látka

Implicit Integration

- Pozícia a rýchlosť
  - ***x(t_0)***, ***x.(t_0)*** v čase t_0
  - Chceme zistiť v čase t_0 + h

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \dot{\mathbf{x}} \end{pmatrix} = \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \end{pmatrix}.$$

- Transformujeme rovnicu (definujeme ***v*** = ***x.***)
- Následne pre zjednodusenie zadefinujeme $\boldsymbol{x_0}$ a $\boldsymbol{v_0}$, $\Delta\boldsymbol{x}$ ako $\boldsymbol{x(t_0 + h) - x(t_0)}$ a rovnako $\Delta\boldsymbol{v}$.
- Explicitna popredná eulerova metóda

$$\begin{pmatrix} \Delta\mathbf{x} \\ \Delta\mathbf{v} \end{pmatrix} = h\begin{pmatrix} \mathbf{v}_0 \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{f}_0 \end{pmatrix}$$

- Implicitná spätná eulerova metóda

$$\begin{pmatrix} \Delta\mathbf{x} \\ \Delta\mathbf{v} \end{pmatrix} = h\begin{pmatrix} \mathbf{v}_0 + \Delta\mathbf{v} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + \Delta\mathbf{x}, \mathbf{v}_0 + \Delta\mathbf{v}) \end{pmatrix}$$

Implicitná integrácia

- Použijeme Taylorov rozvoj na ***f*** a spravíme aproximáciu, následne substituujeme na rovnicu z ktorej vyplýva lineárny systém.

$$\begin{pmatrix} \Delta\mathbf{x} \\ \Delta\mathbf{v} \end{pmatrix} = h \begin{pmatrix} \mathbf{v}_0 + \Delta\mathbf{v} \\ \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{f}_0 + \frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\mathbf{x}}\Delta\mathbf{x} + \frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\mathbf{v}}\Delta\mathbf{v}) \end{pmatrix}$$

- Následne substitúcia $\Delta \boldsymbol{x} = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{v}_0 + \Delta \boldsymbol{v})$

$$\Delta\mathbf{v} = h\mathbf{M}^{-1}\left(\mathbf{f}_0 + \frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\mathbf{x}}h(\mathbf{v}_0 + \Delta\mathbf{v}) + \frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\mathbf{v}}\Delta\mathbf{v}\right)$$

- Označíme ***I*** ako identity matrix, preskupíme

$$\left(\mathbf{I} - h\mathbf{M}^{-1}\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\mathbf{v}} - h^2\mathbf{M}^{-1}\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\mathbf{x}}\right)\Delta\mathbf{v} = h\mathbf{M}^{-1}\left(\mathbf{f}_0 + h\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\mathbf{x}}\mathbf{v}_0\right)$$

- Vyriešime pre $\Delta \boldsymbol{v}$ a následne môžeme vyrátať $\Delta \boldsymbol{x} = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{v}_0 + \Delta \boldsymbol{v})$.

Forces

- Popis správania materiálu – funkcia ***E(x)***
  - **f = −** $\partial E / \partial x$.

- Spravíme dekompozíciu na sumu sparse energy functions
  - $E(x) = \sum_a E_a(x)$, kde E_a závisí na čo najmenej časticiach

- Formulácia vektorových podmienok ***C(x)*** a asociovaných energí – $k/2 * C(x)^t * C(x)$ kde ***k*** je stifness constant.

Forces
Forces and force derivatives

- S podmienkou ***C(x)*** asociujeme energickú funkciu E_c so zápisom ***Ec(x) = k/2 * C(x)*** ^{t} **** C(x)***
- Pre každú časticu od ktorej ***C*** záleží platí

$$\mathbf{f}_i = -\frac{\partial E_C}{\partial \mathbf{x}_i} = -k\frac{\partial \mathbf{C}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}_i}\mathbf{C}(\mathbf{x});$$

- Definujeme derivačnú maticu ***K = ∂f/ ∂x,*** potom nenulové vstupy sú K_{ij} pre všetky páry častíc **i** a **j**.

$$\mathbf{K}_{ij} = \frac{\partial \mathbf{f}_i}{\partial \mathbf{x}_j} = -k\left(\frac{\partial \mathbf{C}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}_i}\frac{\partial \mathbf{C}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}_j}^T + \frac{\partial^2 \mathbf{C}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}_i \partial \mathbf{x}_j}\mathbf{C}(\mathbf{x})\right)$$

- Keďže ***C*** nezávisí na ***v***, matica ***∂f/ ∂v*** je nula.
- Takto pomocou podmienkových funkcií môžeme popísať vnútorné sily. Samotné sily a ich deriváty sa dajú ľahko vypočítať z dvoch horných rovníc.

Forces
Stretch forces

- Predpokladáme kontinuálnu funkciu ***w(u,v)*** ktorá mapuje rovinné koordináty do svetových.
- Skúmame deriváty $\boldsymbol{w_u}$ a $\boldsymbol{w_v}$ v konkrétnom bode.
  - $\boldsymbol{w_u}$ - Natiahnutie alebo kompresia v smere ***u***
  - Aplikujeme meranie na konkrétny trojuholník
  - $\Delta \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i$, $\Delta \mathbf{x}2 = \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_i$. To isté pre ***u*** a ***v***.
  - Za predpokladu že $\boldsymbol{w_u}$ a $\boldsymbol{w_v}$ sú konštanty v každom trojuholníku dostaneme $\Delta \mathbf{x}_1 = \boldsymbol{w_u} * \Delta \mathbf{u}_1 + \boldsymbol{w_v} * \Delta \mathbf{v}_1$, rovnako pre $\Delta \mathbf{x}_2$

$$(\mathbf{w}_u \quad \mathbf{w}_v) = (\Delta \mathbf{x}_1 \quad \Delta \mathbf{x}_2) \begin{pmatrix} \Delta u_1 & \Delta u_2 \\ \Delta v_1 & \Delta v_2 \end{pmatrix}^{-1}$$

  - Kedže $\boldsymbol{w_u}$ a $\boldsymbol{w_v}$ sú funkcie ***x***, môžeme napísať podmienku

$$\mathbf{C}(\mathbf{x}) = a \begin{pmatrix} \|\mathbf{w}_u(\mathbf{x})\| - b_u \\ \|\mathbf{w}_v(\mathbf{x})\| - b_v \end{pmatrix}$$

Forces
Shear and bend forces

- Vnútorný produkt $w_u^{t} w_v$

- Podmienka pre trhanie $C(x) = a * wu(x)^{t} * wv(x)$
  - A je časť trojuholníka v rovine **uv**.

- Podmienka ohybu
  - Meriame ohyb medzi pármi susedných trojuholníkov
  - Uhol medzi hranami $\sin \mathit{alfa} = (n_1 \times n_2) * e$ a $\cos \mathit{alfa} = n_1 * n_2$
- **C(x) = alfa**
- Stiffness weighting pre konkrétnu hranu

$$\frac{k_u(\Delta u)^2 + k_v(\Delta v)^2}{(\Delta u)^2 + (\Delta v)^2}$$

- ++ Dodatočné sily

Damping

- Funkcie pozície a rýchlosti
  - Napr naťahovacia sila potrebuje damping force len pre aktivity ktoré majú za výsledok samotné natiahnutie
- Na formuláciu použijeme podmienku ***C(x)***. Sila ***f*** pôsobí smerom ***∂C(x)/ ∂x***, damping force by mala teda záležať na časti rýchlosti systému v smere ***∂C(x)/ ∂x,*** z toho môžeme odvodiť

$$\mathbf{d} = -k_d \frac{\partial \mathbf{C}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{C}}(\mathbf{x})$$

- Upravíme pridaním damping force, kde ***d****ᵢ* je nenulová hodnota len pre častice na ktorých ***C*** závisí. Diferencovaním získame (Pre zjednodušenie sa časť pôvodnej rocnice vynecháva aby sme dosiahli symetriu)

$$\frac{\partial \mathbf{d}_i}{\partial \mathbf{x}_j} = -k_d \left(\frac{\partial \mathbf{C}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}_i} \frac{\partial \dot{\mathbf{C}}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}_j}^T + \frac{\partial^2 \mathbf{C}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}_i \partial \mathbf{x}_j} \dot{\mathbf{C}}(\mathbf{x}) \right)$$

Constraints

- Stav častice v každom kroku
- Automaticky generované alebo pridelené používateľom
  - User : geometric attachment constraint
  - Automated: contact constraint
- Obmedzujeme **zrýchlenie**
- Rôzne metódy a ich nevýhody
  - Reduced coordinates
  - Penalty methods
  - Lagrange multipliers

Constraints
Mass modification

- Jednoduchá idea ale zložitá implementácia (vzhľadom na efektivitu)
- Inverzná matica hmostnosti
  - Problem s obmedzením zmeny rýchlosti – a/m_i = 0 vyústi v časticu s nekonečnou hmotnosťou.
- Všeobecné obmedzenie, pomocou vektora ***p***, častica je obmedzená v akcelerácií na smer vektora ***p*** s použitím inverznej matice – $1/m_i * (I - pp^t - qq^t)$
- Umožníme priame vkladanie constraintov do rovnice.
- Modifikujeme inverzné ***M*** na ***W***
  - Ndof(i)
  - Diagonálne bloky $W_{ii} = 1/m_i * S_i$, kde S_i

$$S_i = \begin{cases} \mathbf{I} & \text{if } \mathrm{ndof}(i) = 3 \\ (\mathbf{I} - \mathbf{p}_i\mathbf{p}_i^T) & \text{if } \mathrm{ndof}(i) = 2 \\ (\mathbf{I} - \mathbf{p}_i\mathbf{p}_i^T - \mathbf{q}_i\mathbf{q}_i^T) & \text{if } \mathrm{ndof}(i) = 1 \\ \mathbf{0} & \text{if } \mathrm{ndof}(i) = 0. \end{cases}$$

- Finálna rovnica

$$\left(\mathbf{I} - h\mathbf{W}\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{v}} - h^2\mathbf{W}\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}\right)\Delta\mathbf{v} = h\mathbf{W}\left(\mathbf{f}_0 + h\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{v}_0\right) + \mathbf{z}$$

Constraints
Mass modification -implementation

- Priama implementácia podľa očakávania
  - Gausova eliminačná metóda pre malé systémy
  - Na väčšie systémy – iteratívna CG metóda – problém
- Bez CG a constraintu

$$\left(\mathbf{M} - h\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{v}} - h^2\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}\right)\Delta\mathbf{v} = h\left(\mathbf{f}_0 + h\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{v}_0\right)$$

- Modifikácia CG na rovnicu vyššie
  - Pamätanie constraintov v matici ***W***

$$\mathbf{A} = \left(\mathbf{M} - h\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{v}} - h^2\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}\right)$$

  - S podmienkami

$$\mathbf{b} = h\left(\mathbf{f}_0 + h\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{v}_0\right) \qquad \mathbf{r} = \mathbf{A}\Delta\mathbf{v} - \mathbf{b}.$$

The Modified Conjugate Gradient Method

- Pôvodná metóda

- Nová formulácia
  - Efekt matice ***W*** v rovnici – filter rýchlosti v určených smeroch
  - Invariant
  - Procedúra filter

procedure modified-pcg

$\Delta\mathbf{v} = \mathbf{z}$

$\delta_0 = \mathbf{filter}(\mathbf{b})^T \mathbf{P}\, \mathbf{filter}(\mathbf{b})$

$\mathbf{r} = \mathbf{filter}(\mathbf{b} - \mathbf{A}\Delta\mathbf{v})$

$\mathbf{c} = \mathbf{filter}(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{r})$

$\delta_{\text{new}} = \mathbf{r}^T\mathbf{c}$

while $\delta_{\text{new}} > \epsilon^2 \delta_0$

  $\mathbf{q} = \mathbf{filter}(\mathbf{A}\mathbf{c})$

  $\alpha = \delta_{\text{new}} / (\mathbf{c}^T\mathbf{q})$

  $\Delta\mathbf{v} = \Delta\mathbf{v} + \alpha\mathbf{c}$

  $\mathbf{r} = \mathbf{r} - \alpha\mathbf{q}$

  $\mathbf{s} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{r}$

  $\delta_{\text{old}} = \delta_{\text{new}}$

  $\delta_{\text{new}} = \mathbf{r}^T\mathbf{s}$

  $\mathbf{c} = \mathbf{filter}(\mathbf{s} + \frac{\delta_{\text{new}}}{\delta_{\text{old}}}\mathbf{c})$

Determining the Constraint Forces

- Kontakt solid vs cloth
  - Skutočná sila obmedzenia
  - Trecie sily
  - Kombinatorická metóda

- Friction
  - Tangenial force vs normal force
  - Slide

Collisions

- Základná kontrola cloth/cloth
  - Kontrola párov častíc a hrán na prieniky
  - Pri pozitívnej detekcií použijeme silnú damped string force.
  - Tangent force
- Základná kontrola solid/cloth
  - Test častít
  - Hierarchia stien objektov
- Constraint initiation
  - Problém pri v diskrétnych krokoch s vyhodnotením
  - Cloth/cloth – spring forces
  - Cloth/solid – problém

COLLISIONS
Position alteration

- Veľký záujem o možnosť efektívne meniť pozíciu častice
  - Extra implicitný krok – moc drahé riešenie
  - Využiť filtrovací efekt implicitnej integrácie
- Zmena rýchlosti zrazenej s objektom je pod kontrolou. Pozícia je tvorená nasledovne

$$\Delta \mathbf{x}_i = h(\mathbf{v}_{0_i} + \Delta \mathbf{v}_i)$$

$$\Delta \mathbf{x}_i = h(\mathbf{v}_{0_i} + \Delta \mathbf{v}_i) + \mathbf{y}_i$$

- Uprava rovnice podľa zmeny vyššie

$$\left(\mathbf{M} - h\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{v}} - h^2\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}\right)\Delta \mathbf{v} = h\left(\mathbf{f}_0 + h\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{v}_0 + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{y}\right)$$

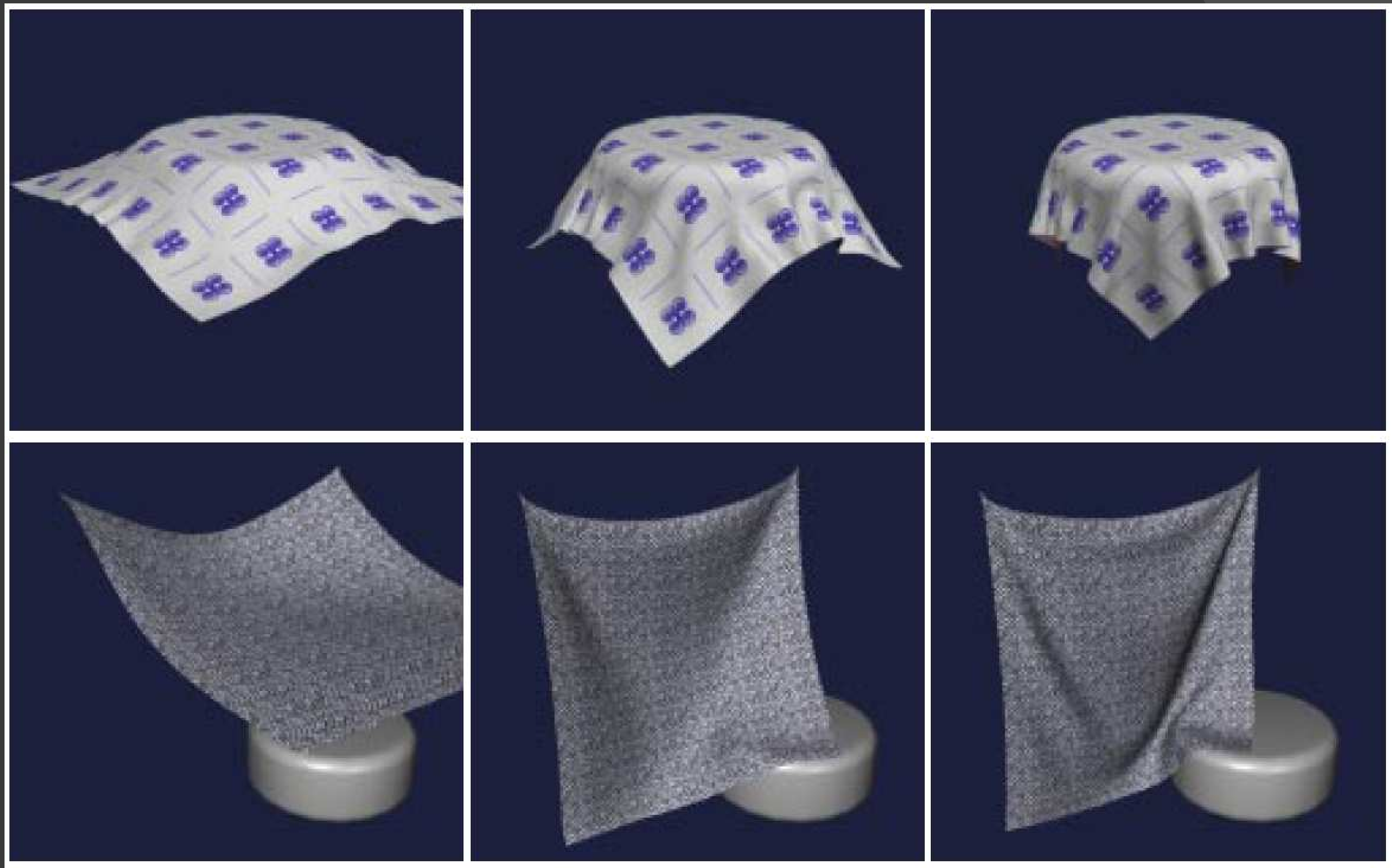
- Výsledok – úplná kontrola.

Adaptive Time Stepping

- Spomínané metódy umožňujú vykonávať relatívne veľké a hlavne stabilné kroky
- Cieľ animácie
  - Presnosť rovnako dôležitá ako stabilita
- Trik – odhalenie nestabilitu pred zobrazením
  - Tuhosť vyplýva skoro celá zo silnej ťahacej sily
  - Navrhujem stav pre každý krok
  - Pri dramatických zmenách stav zahodím a znížim veľkosť kroku

Final performance

figure		no. vertices/no. triangles cloth	solid	time/frame (CPU sec.)	step size min/max (ms)	total frames/ total steps	task breakdown percentage EVAL	CG	C/C	C/S
1		2,602/4,9442	322/640	2.23	16.5/33	75/80	25.7	50.4	18.3	1.4
2		2,602/4,9442	322/640	3.06	16.5/33	75/80	17.9	63.6	15.3	0.2
3		6,450/12,654	9,941/18,110	7.32	16.5/33	50/52	18.9	37.9	30.9	2.6
4	(shirt)	6,450/12,654	9,941/18,110	14.5	2.5/20	430/748	16.7	29.9	46.1	2.2
	(pants)	8,757/17,352	9,941/18,110	38.5	0.625/20	430/1214	16.4	35.7	42.5	1.7
5	(skirt)	2,153/4,020	7,630/14,008	3.68	5/20	393/715	18.1	30.0	44.5	1.5
	(blouse)	5,108/10,016	7,630/14,008	16.7	5/20	393/701	11.2	26.0	57.7	1.3
6	(skirt)	4,530/8,844	7,630/14,008	10.2	10/20	393/670	20.1	36.8	29.7	2.6
	(blouse)	5,188/10,194	7,630/14,008	16.6	1.25/20	393/753	13.2	30.9	50.2	1.4



Ďakujem za pozornosť, spracoval Karol Vanko.