

# Cvičenia na prvorádovú logiku

V niektorých úlohách sa pracuje s prvorádovým jazykom rozšíreným o binárny logický predikát rovnosti „ $=$ “. Formuly tvaru  $t_1 = t_2$ , kde  $t_1, t_2$  sú termy, sú atómy. Sémantika rovnosti je nasledovná: štruktúra  $\mathcal{D} = (D, I)$  spĺňa atóm  $t_1 = t_2$ , ak termy  $t_1, t_2$  označujú ten istý objekt z domény. Symbolicky:

$$\mathcal{D} \models t_1 = t_2 \text{ iff } t_1^I = t_2^I$$

## 1 Syntax

Nasledovnú signatúru  $\sigma_s$  použijeme na popis vzťahov študentov v škole, v ktorej máme:

- tri predikátové symboly: byť mužom, kamarátiť sa, byť starší ako;
- štyri funkčné symboly: konkrétny študent Ján, najstaršia študentka v škole najŠtudentka a funkcie, ktoré každému študentovi priradia najstaršieho spolužiaka F, resp. najmladšieho študenta staršieho ako on S.

**Príklad 1.**  $\sigma_s = (\mathcal{P}, \mathcal{F}, \text{arity})$ , kde:

- $\mathcal{P} = \{Muž, Kam, \succ\}$  je množina všetkých mimologických predikátových symbolov
- $\mathcal{F} = \{Ján, najŠtudentka, F, S\}$  je množina všetkých funkčných symbolov
- $\text{arity} = \{(Muž, 2), (Kam, 2), (\succ, 2), (Ján, 0), (najŠtudentka, 0), (F, 1), (S, 1)\}$  je funkcia arnosti

**Úloha 1.** Uvažujme prvorádový jazyk s rovnosťou (binárny predikátový symbol  $=$ ) a signatúrou  $\sigma_s$ . Rozhodnite, ktoré z nasledujúcich slov sú dobre vytvorené *termy* a *formuly*. Ktoré z nich sú uzemnené? Riadťe sa striktnie podľa definícií z prednášky <sup>1</sup>.

- a)  $(\exists y)Ján = Ján$  b)  $S(x)$  c)  $F(Ján)$  d)  $F(S(F(najŠtudentka)))$  e)  $(\forall x)S(x)$  f)  $Ján \prec Ján$   
g)  $S(x, y)$  h)  $\neg Muž(najŠtudentka) \wedge Kam(Ján, Ján)$  i)  $Ján \succ Muž(Ján)$  j)  $x \leftrightarrow Ján$

**Úloha 2.** Majme binárny predikátový symbol  $p$ . Určte výskyt (*viazaný* alebo *voľný*) premenných v nasledujúcich formulách. Ktoré formuly sú *uzavreté*?

- a)  $(\exists x)(p(x, x) \vee p(x, z))$  b)  $(\forall x)(\forall y)(\forall z)((p(x, y) \wedge p(y, z)) \rightarrow p(x, z))$  c)  $(\forall x)p(y, y)$   
d)  $((\exists x)p(x, x) \rightarrow p(x, x))$  e)  $(\exists x)(p(x, x) \rightarrow p(x, x))$  f)  $((\exists x)p(x, x) \rightarrow (\forall y)p(y, x))$

Ďalej, ak nedôjde k zmene významu, budeme niektoré zátvorky vynechávať. Napr.  $p \vee q$  miesto  $(p \vee q)$  alebo  $p \wedge q \wedge r$  miesto  $(p \wedge q) \wedge r$ . Podobne miesto  $\neg(Ján = najŠtudentka)$  budeme písať  $Ján \neq najŠtudentka$ .

## 2 Sémantika

V celom texte používame slovo „študent“ nerodovo a slová „študent-muž“, „študentka-žena“ rodovo. Podobne aj slovo „spolužiak“.

**Príklad 2.** Pre signatúru  $\sigma_s$  môžeme napríklad uvažovať nasledovnú schému štruktúr:

- univerzum (doména) je neprázdna množina študentov
- $Muž(x)$  interpretujeme ako „ $x$  je mužom“
- $Kam(x, y)$  interpretujeme ako „ $x$  je kamarátom  $y$ “
- $x \succ y$  interpretujeme ako „ $x$  je starší než  $y$ “

<sup>1</sup>Hint: Striktnie vzaté podľa definície z prednášky, slovo  $Muž(x) \wedge Muž(x)$  nie je formula. Prečo?

- Ján interpretujeme ako konkrétneho študenta-muža Jana
- najŠtudentka interpretujeme ako najstaršiu študentku-ženu v škole
- F interpretujeme ako funkciu, ktorá každému študentovi priradí najstaršieho študenta v jeho triede
- S interpretujeme ako funkciu, ktorá každému študentovi  $x$  priradí toho študenta, ktorý je najmladší zo študentov starších ako  $x$ . Táto funkcia je definovaná pre každého študenta v škole, okrem najstaršieho. Tomu nech S priradí jeho samotného.

V príklade 2 sme si popísali *zamýšľané* štruktúry pre školu. Uvedomme si však, že vo všeobecnosti nám nič nebráni uvažovať akúkoľvek inú neprázdnu doménu, interpretovať predikátový symbol *Muž* ako „byť ženou“, či funkčnú konštantu najŠtudentka ako nejaké prvočíslo (v prípade, že nejaké doména obsahuje). Na to treba myslieť pri rozhodovaní vyplývania formuly z teórie, kedy je potrebné overiť *všetky* modely teórie, nie len pôvodne zamýšľané.

**Úloha 3.** Definujme si teraz konkrétnu štruktúru  $\mathcal{D} = (D, I)$  nad signatúrou  $\sigma_s$ :

- $D = \{1, \dots, 10\}$
- $Muž^I = \{5, \dots, 10\}$
- $Kam^I = \{(i, j) \mid i, j \in \{1, \dots, 5\}, i \neq j\}$
- $\succ^I = \{(i, j) \mid i > j\}$
- $F^I(x) = 10$
- $S^I(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{pre } x < 10 \\ 10 & \text{pre } x = 10 \end{cases}$

Doplňte  $I$  o interpretáciu funkčných konštánt tak, aby štruktúra  $\mathcal{D}$  spĺňala formulu (v prípade, že to nie je možné, uveďte dôvod)

- a) najŠtudentka  $\succ$  Ján    b) najŠtudentka  $\succ$  Ján  $\wedge \neg Muž(\text{najŠtudentka}) \wedge Muž(\text{Ján})$   
c)  $(\forall x)(\text{najŠtudentka} \succ x \rightarrow Kam(x, \text{najŠtudentka}))$     d)  $(\forall x)(Kam(x, \text{najŠtudentka}) \rightarrow Kam(x, \text{Ján}))$   
e)  $(\forall x)(Kam(x, \text{Ján}) \rightarrow Kam(x, \text{najŠtudentka})) \wedge Muž(\text{Ján}) \wedge \neg Muž(\text{najŠtudentka})$   
f)  $F(\text{Ján}) = \text{najŠtudentka}$     g)  $S(\text{najŠtudentka}) = \text{Ján} \wedge Muž(\text{Ján}) \wedge \neg Muž(\text{najŠtudentka})$

**Úloha 4.** Ak je to možné, nájdite model teórie  $T$  (stačí ak interpretujete len symboly vyskytujúce sa v  $T$ ), podľa zadania:

$$T = \{(\exists x)(\exists y)x \succ y, \neg Muž(\text{najŠtudentka}), (\forall x)(x \succ \text{najŠtudentka} \rightarrow Muž(x))\}$$

- a) doména je jednoprvková  
b) doména je viacprvková

**Úloha 5.** Majme štruktúru  $\mathcal{D} = (D, I)$  z úlohy 3, kde navyše

$$\text{Ján}^I = 5 \text{ a } \text{najŠtudentka}^I = 4$$

Rozhodnite či  $\mathcal{D}$  je modelom formuly:

- a)  $(\forall x)(\forall y)(Kam(x, y) \rightarrow Kam(y, x))$   
b)  $S(\text{najŠtudentka}) = \text{Ján}$   
c)  $(\exists x)Kam(x, x)$   
d)  $(\forall x)(\neg Muž(x) \rightarrow Kam(\text{Ján}, x))$

- e)  $(\forall x)(\forall y)(\forall z)((Kam(x, y) \wedge Kam(y, z)) \rightarrow Kam(x, z))$
- f)  $(\forall x)(\forall y)(\forall z)((Kam(x, y) \wedge Kam(y, z)) \rightarrow (Kam(x, z) \vee x \neq z))$
- g)  $((\exists x)Kam(najŠtudentka, x) \wedge Muž(x)) \rightarrow Kam(S(S(najŠtudentka)), Ján)$
- h)  $(\forall x)((\neg Muž(x) \rightarrow Kam(najŠtudentka, x)) \rightarrow Ján = najŠtudentka)$
- i)  $(\forall x)(\neg Muž(x) \rightarrow Kam(najŠtudentka, x)) \rightarrow Ján = najŠtudentka$

**Úloha 6.** Rozhodnite či z teórie vyplýva daná uzavretá formula:

- a)  $\{(\forall x)F(x) \neq Ján\} \models (\exists x)x \neq Ján$
- b)  $\{(\forall x)F(x) \neq Ján\} \models F(F(Ján)) = Ján$
- c)  $\{(\forall x)F(x) \neq Ján\} \models F(F(F(najŠtudentka))) \neq Ján$
- d)  $\{(\forall x)(x = Ján \vee x = najŠtudentka)\} \models Ján \succ najŠtudentka \vee najŠtudentka \succ Ján$
- e)  $\{(\forall x)(\forall y)(\forall z)((x \succ y \wedge y \succ z) \rightarrow x \succ z), (\exists x)(\exists y)x \succ y\} \models (\exists x)(\forall y)(y \neq x \rightarrow y \succ x)$

**Úloha 7.** Majme ľubovoľnú teóriu  $T$ , uzavretú formulu  $\phi$ .  $T \models \phi$  práve vtedy keď teória  $T \cup \{\neg\phi\}$  je nesplniteľná. Dokážte!

### 3 Formalizácia

**Úloha 8.** Majme signatúru  $\sigma_s$  z príkladu 1 a uvažujme iba štruktúry popísané v príklade 2.

Vyjadrite v prvorádovom jazyku s rovnosťou a signatúrou  $\sigma_s$  formulu s významom „najstarší študent celej školy je žena“ a to rôznymi spôsobmi podľa zadania:

- a) môžete použiť všetky symboly z  $\sigma_s$ , avšak formula musí byť *uzemnená (grounded)*.
- b) *nemôžete* použiť funkčné konštanty a kvantifikovať smiete najviac raz.
- c) *nemôžete* použiť žiadne funkčné symboly.

Ďalej formalizujte nasledovné vety:

- d) „Ján je najstarší vo svojej triede“
- e) „Najstarší Janov spolužiak je žena“
- f) „Najstarší Janov spolužiak je najstarším študentom v celej škole“
- g) „Najstaršia študentka v škole nie je mladšia ako najstarší Janov spolužiak“
- h) „Najstaršia študentka v škole nie je mladšia ako najstarší študent v škole“

**Úloha 9.** Uvažujme jazyk s rovnosťou, signatúru  $\sigma_s$  a štruktúry z príkladu 2. Slovom vyjadrite nasledovné formuly:

- a)  $(\forall x)(\forall y)(x \succ y \vee x = y \vee y \succ x)$
- b)  $(\forall x)(\exists y)Kam(x, y)$
- c)  $(\exists x)(\forall y)Kam(x, y)$
- d)  $S(Ján) \neq Ján$
- e)  $\neg Muž(najŠtudentka)$
- f)  $(\exists x)(\neg Muž(x) \wedge Kam(F(Ján), x) \wedge x \succ F(Ján))$

**Úloha 10.** Navrhните vhodnú signatúru a formalizujte nasledovné vety. V prípade nejednoznačnosti uveďte viac formalizácií.

- a) „Každé auto má svojho majiteľa“
- b) „Nie je také jedlo, ktoré by každému chutilo“

- c) „Každý ma niekoho rád alebo niekoho nenávidí“
- d) „Niekto dal Júlii kyticu“
- e) „Niekto dal Júlii niečo“
- f) „Niekto dal niekomu kyticu“
- g) „Niekto dal niekomu niečo“
- h) „Rómeo dal Júlii niečo“
- i) „Rómeo dal niekomu kyticu“
- j) „Rómeo dal Júlii kyticu“
- k) „Niekto nedal Júlii kyticu“
- l) „Niekto dal každému niečo“
- m) „Každý dal každému niečo“
- n) „Každý dal každému všetko“
- o) „Nikto nedal nikomu nič“