

Domáca úloha č.2

Použite vhodný kalkulátor Wolfram Alfa, Mathematica, Matlab/Octave, prípadne naprogramujte vlastný skript. Veľmi podrobne popíšte Vaše riešenie.

Je daná sústava obyčajných diferenciálnych rovníc (ODR) prvého rádu popisujúca pohyb chaotického kyvadla

$$\frac{dx(t)}{dt} = y(t), \quad (1)$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = -cy(t) - \sin(x(t)) + F \cos(z(t)), \quad (2)$$

pričom $z(t) = \omega t$, $c = 0.05$, $\omega = 0.7$. Sila $F \in \langle 0.4, 1.0 \rangle$ s krokom 0.1. Oscilačná premenná je uhol kyvadla $x(t) \in \langle -\pi, \pi \rangle$. Čas $t \in \langle 0, 20\pi \rangle$.

Zvoľte si začiatočnú podmienku $x(0) = \pi/4$, $y(0) = 0.mn$, kde mn sa vypočíta z vášho dátumu narodenia ako deň krát mesiac (napr. pre dátum 14.2. bude koeficient 0.28).

a) Vyriešte prvú ODR (1) analyticky. Neznáma funkcia je $x(t) = \dots$

b) Na základe vlastného experimentovania si zvoľte vhodný krok Δt a vypočítajte $x(0), x(\Delta t)$. Podrobne popíšte každý krok výpočtu a dosadenia.

c) Využite vlastnú tvorivosť a pre všetky uvedené F zostrojte fázový diagram (graf)

1. uhlovej rýchlosti $y(t) = \frac{dx}{dt}$ závislej od t .

2. uhlovej rýchlosti $y(t)$ závislej od $x(t)$.

3. uhlovej rýchlosti $z(t)$ závislej od $x(t)$.

d) Vyhodnoťte grafy, kedy pozorujete periodický pohyb a medzi koľkými trajektóriami sa pohybuje kyvadlo, kedy pozorujete chaotický pohyb?

e) Majme dve riešenia úlohy (1) a (2) pre začiatočné hodnoty $x_1(0) = 0.700000000$ a $x_2(0) = 0.700000001$ ($y_1(t) = y_2(t) = 0.mn$) vyrátajte rozdiel $d_n = x_2(10000) - x_1(10000)$. Vypočítajte koeficient λ zo vzťahu $d_n = 0.000000001e^{10000\lambda}$. λ vyjadruje chaotickú citlivosť a volá sa Lyapunov exponent.