3. domáca úloha z predmetu 1-AIN-160 Matematika (3) ZS 2019/20

Tatiana Jajcayová Ján Komara

2. novembra 2019

1. príklad

Nech $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ a nech $\mathcal{R}$ je relácia *byť podmnožinou* $\subseteq_A$ definovaná na potenčnej množine $\mathcal{P}(A)$. Už vieme, že táto relácia je čiastočné usporiadanie na $\mathcal{P}(A)$.

Nech $M = \{\{1\}, \{2\}, \{2, 5\}\}$. Nájdite:

(a) Počet horných ohraničení M, ktoré obsahujú

  i. štyri prvky,

  ii. päť prvkov.

(b) Počet všetkých horných ohraničení M a počet všetkých dolných ohraničení M.

(c) $\sup(M)$ a $\inf(M)$.

(d) Pripomeňme:

> *Definícia.* Čiastočne usporiadaná množina $(A, \mathcal{R})$ sa nazýva zväz, ak $\sup(\{x, y\})$ aj $\inf(\{x, y\})$ existujú v A pre každé $x, y \in A$.

Je $(\mathcal{P}(A), \subseteq_A)$ zväz? (Svoju odpoveď zdôvodnite.)

Riešenie 1. príkladu

Táto časť obsahuje riešenie 1. príkladu.

2. príklad

(a) Dokážte, že čiastočne usporiadaná množina $(A, \mathcal{R})$ môže mať nanajvýš jeden najväčší prvok.

(b) Uveďte príklad čiastočne usporiadanej množiny $(A, \mathcal{R})$, ktorá má viac ako jeden maximálny prvok.

(c) Použitím Hasseho diagramov identifikujte všetky izomorfné triedy ČUM (čiastočne usporiadaných množín) s piatimi prvkami, ktoré majú v Hasseho diagrame presne štyri úrovne.

Riešenie 2. príkladu

Táto časť obsahuje riešenie 2. príkladu.

3. príklad

Profesor Grimaldi sa chystá na svoju prezentáciu na seminári z Diskrétnej matematiky. Ráno sa oblieka a množina O obsahuje kusy šatstva, ktoré si dá na seba, aby pri prezentácii vyzeral slušne:

$$O = \{\text{sako}, \text{nohavice}, \text{košeľa}, \text{topánky}, \text{ponožky}, \text{spodky}, \text{tielko}, \\ \text{hodinky}, \text{kravata}, \text{okuliare}\}.$$

Na množine O definujme reláciu čiastočného usporiadania $\mathcal{R}$ nasledovne:

> $o_1 \mathcal{R} o_2$, ak oblečenie o_1 si musí profesor obliecť predtým ako si oblečie oblečenie o_2.

Napríklad, dvojica $(\text{košeľa}, \text{kravata}) \in \mathcal{R}$, lebo kravatu si nemôže uviazať bez toho aby mal na sebe košeľu, ale dvojice $(\text{košeľa}, \text{ponožky}) \notin \mathcal{R}$, ani $(\text{ponožky}, \text{košeľa}) \notin \mathcal{R}$, lebo oblečenie košele a ponožiek je nezávislé a môže to urobiť v akomkoľvek poradí.

(a) Nakreslite Hasseho diagram čiastočne usporiadanej množiny $(O, \mathcal{R})$.

(b) $(O, \mathcal{R})$ nie je lineárne usporiadaná. Prečo?

(c) Nájdite dve rôzne lineárne usporiadania $\mathcal{L}_1$ a $\mathcal{L}_2$ množiny O, ktoré rešpektujú čiastočné usporiadanie $\mathcal{R}$ (t. j. $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{L}_i$) a v ktorých si profesor Grimaldi nasadí hodinky ako posledné.

(d) Koľko je všetkých možných lineárnych usporiadaní $\mathcal{L}$ množiny O, ktoré rešpektujú čiastočné usporiadanie $\mathcal{R}$ a v ktorých si profesor Grimaldi nasadí okuliare ako prvé a nasadí hodinky ako posledné.

Riešenie 3. príkladu

Táto časť obsahuje riešenie 3. príkladu.

4. príklad

Nech $h : \mathcal{R} \to \mathbb{Z}$ je funkcia definovanú nasledovne:

$h(x) = \lfloor x \rfloor =$ najväčšie celé číslo menšie alebo rovné x.

Nájdite všetky reálne čísla x, také, že

(a) $3\lfloor x \rfloor = \lfloor 3x \rfloor$

(b) $\lfloor 3x \rfloor = 3$

(c) $\lfloor x + 3 \rfloor = x + 3$

(d) $\lfloor x + 3 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 3$

Riešenie 4. príkladu

Táto časť obsahuje riešenie 4. príkladu.

5. príklad

(a) Dokončite dôkaz z prednášky o obraze množiny vo funkcii, teda ukážte, že ak $f : A \to B$ a $X_1, X_2 \subseteq A$, tak

$$f(X_1 \cup X_2) = f(X_1) \cup f(X_2).$$

(b) Aký vzťah platí, ak nahradíme zjednotenie prienikom? Na príklade ukážte, že tam rovnosť platiť nemusí.

(c) Nech $X \subseteq A$ a $Y \subseteq B$ sú konečné množiny. Nech

$$|X| = k \qquad |A| = m \qquad |Y| = l \qquad |B| = n.$$

Koľko je zobrazení f z A do B takých, že $f(X) \supseteq Y$?

Riešenie 5. príkladu

Táto časť obsahuje riešenie 5. príkladu.

6. bonusový príklad (2 extra body + fun)

Ackermanova funkcia $A : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sa dá rekurzívne definovať takto:

$$\begin{aligned}
A(0,n) &= n+1 && \text{ak } n \geq 0\\
A(m,0) &= A(m-1,1) && \text{ak } m > 0\\
A(m,n) &= A(m-1,A(m,n-1)) && \text{ak } m,n > 0.
\end{aligned}$$

(Ackermanova funkcia je dôležitá v informatike a v teórii rekurzívnych funkcií. Jej hodnoty rastú veľmi rýchlo aj pre malé vstupy. Napríklad $A(4,2)$ je celé číslo s 19 729 číslicami v dekadickom zápise.)

(a) Vyrátajte $A(1,3)$ a $A(2,3)$.

(b) Dokážte, že $A(1,n) = n+2$ pre všetky $n \in \mathbb{N}$.

(c) Ukážte, že $A(2,n) = 3+2n$ pre všetky $n \in \mathbb{N}$.

(d) Overte, že $A(3,n) = 2^{n+3} - 3$ pre všetky $n \in \mathbb{N}$.

Riešenie 6. príkladu

Táto časť obsahuje riešenie 6. príkladu.