2. domáca úloha z predmetu 1-AIN-160 Matematika (3) ZS 2018/19

Tatiana Jajcayová   Ján Komara

18. októbra 2019

1. príklad

Nech $A = \{u, v, w, x, y, z\}$. Určite počet relácií na A, ktoré sú

(a) reflexívne a symetrické (zároveň);

(b) ekvivalencie;

(c) reflexívne a symetrické, ale nie sú tranzitívne;

(d) ekvivalencie s práve dvoma triedami rozkladu;

(e) ekvivalencie s $w \in [x]$;

(f) ekvivalencie s $w \in [x]$ a $y \in [z]$;

(g) ekvivalencie s $w \in [x]$, $y \in [z]$ a $[x] \neq [z]$.

Riešenie 1. príkladu

Táto časť obsahuje riešenie 1. príkladu.

2. príklad

(a) Nech $A = \{1, 2, 3, 4, 5\} \times \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Definujme na A reláciu $\mathcal{R}$ nasledovne: $(x_1, y_1)\mathcal{R}(x_2, y_2)$, ak $x_1 + y_1 = x_2 + y_2$.

i. Overte, že $\mathcal{R}$ je ekvivalencia.

ii. Určite triedy ekvivalencie $[(1, 4)]$, $[(4, 2)]$ a $[(1, 1)]$.

iii. Určite rozklad množiny A indukovaný reláciou $\mathcal{R}$.

(b) Nech A je neprázdna množina a nech B je jej jedna fixovaná podmnožina. Definujme reláciu $\mathcal{R}$ na $\mathcal{P}(A)$ takto: $X\mathcal{R}Y$, pre $X, Y \subseteq A$, ak $B \cap X = B \cap Y$.

i. Overte, že $\mathcal{R}$ je ekvivalencia na $\mathcal{P}(A)$.

ii. Pre $A = \{1, 2, 3\}$ a $B = \{1, 2\}$ nájdite rozklad $\mathcal{P}(A)$ indukovaný $\mathcal{R}$.

iii. Pre $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ a $B = \{1, 2, 3\}$ nájdite $[X]$, ak $X = \{1, 3, 5\}$.

iv. Koľko tried rozkladu bude v rozklade indukovanom $\mathcal{R}$ pre $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ a $B = \{1, 2, 3\}$?

Riešenie 2. príkladu

Táto časť obsahuje riešenie 2. príkladu.

3. príklad

(a) Nech $n, n_1, n_2, n_3, n_4 \in \mathbb{Z}^+$ a nech $f : A \to B$, kde $|A| = n$ a $B = \{a, b, c, d\}$ je funkcia, pre ktorú platí $|f^{-1}(a)| = n_1$, $|f^{-1}(b)| = n_2$, $|f^{-1}(c)| = n_3$, $|f^{-1}(d)| = n_4$ a $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = n$.

Na množine A definujme reláciu $\mathcal{R}$ takto:

$$x\mathcal{R}y, \text{ ak } x, y \in A \text{ a } f(x) = f(y).$$

i. Nájdite $|\mathcal{R}|$.

ii. Je $\mathcal{R}$ ekvivalencia? Ak áno, aký rozklad na množine A indukuje?

(b) Nech $f : A \to B$ je funkcia. Dokážte, že ak $\{B_1, B_2, \ldots, B_n\}$ je rozklad množiny B, tak $\{f^{-1}(B_i) \mid 1 \leq i \leq n, f^{-1}(B_i) \neq \emptyset\}$ je rozklad množiny A.

Riešenie 3. príkladu

Táto časť obsahuje riešenie 3. príkladu.

4. príklad

(a) Nech A je množina a nech $\mathcal{R}$, binárna relácia definovaná na potenčnej množine $\mathcal{P}(A)$, je relácia "byť podmnožinou". (To znamená, že pre dve podmnožiny X, Y množiny A, $X\mathcal{R}Y$, ak $X \subseteq Y$.)

Overte, že $\mathcal{R}$ je čiastočné usporiadanie na $\mathcal{P}(A)$. Má toto čiastočné usporiadanie najväčší a najmenší prvok?

(b) i. Koľko relácií čiastočného usporiadania existuje na 3-prvkovej množine?

ii. Koľko relácií, ktoré sú reflexívne, antisymetrické, ale nie tranzitívne, existuje na 3-prvkovej množine?

iii. Koľko existuje relácií čiastočného usporiadania na 3-prvkovej množine bez najmenšieho prvku?

iv. Koľko existuje lineárnych usporiadaní 3-prvkovej množiny?

Riešenie 4. príkladu

Táto časť obsahuje riešenie 4. príkladu.

5. príklad

Toto je príklad, ktorý zostal z predchádzajúcej úlohy. Niektorí ste ho možno riešili už vtedy. Teraz ho treba odovzdať.

(a) Nech $n \in \mathbb{Z}^+$, $n > 1$ a nech A je množina všetkých kladných celočíselných deliteľov čísla n. Definujme reláciu $\mathcal{R}$ na A takto: $(x, y) \in \mathcal{R}$, ak x delí y. Určite koľko usporiadaných dvojíc obsahuje relácia $\mathcal{R}$ pre $n = 20$, $n = 210$ a $n = 13860$.

(b) Nech p_1, p_2, p_3 sú rôzne prvočísla. Nech $n, k \in \mathbb{Z}^+$ také, že $n = p_1^5 p_2^3 p_3^k$. Nech A je množina kladných celočíselných deliteľov n. Reláciu $\mathcal{R}$ na A definujeme rovnako ako v predchádzajúcej časti: $x\mathcal{R}y$, ak x delí y. Nájdite k a $|A|$, ak vieme, že $\mathcal{R}$ má 5880 usporiadaných dvojíc.

Riešenie 5. príkladu

Táto časť obsahuje riešenie 5. príkladu.