

1. domáca úloha z predmetu 1-AIN-160 Matematika (3) ZS 2019/20

Tatiana Jajcayová Ján Komara

4. októbra 2019

1. príklad

Ktoré vlastnosti (z tých, čo sme definovali na prednáške) má a ktoré nemá relácia \mathcal{R} definovaná na $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$? Zistite či niektoré z týchto relácií sú ekvivalencie.

- (a) $(x, y) \in \mathcal{R} \Leftrightarrow x + y$ je párne číslo.
- (b) $(x, y) \in \mathcal{R} \Leftrightarrow x + y < 100$.
- (c) $(x, y) \in \mathcal{R} \Leftrightarrow |x - y| \leq 1$.

Riešenie 1. príkladu

Táto časť obsahuje riešenie 1. príkladu.

2. príklad

Nech $A = \{w, x, y, z\}$. Koľko je relácií na A , ktoré sú

- (a) reflexívne a symetrické;
- (b) symetrické a obsahujú (x, y) ;
- (c) antisymetrické a obsahujú (x, y) ;
- (d) symetrické a antisymetrické.

Riešenie 2. príkladu

Táto časť obsahuje riešenie 2. príkladu.

3. príklad

Nech $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Koľko symetrických relácií na A obsahuje presne

- (a) päť usporiadaných dvojíc?
- (b) osem usporiadaných dvojíc?

Riešenie 3. príkladu

Táto časť obsahuje riešenie 3. príkladu.

4. príklad

- (a) Nech \mathcal{R}_1 a \mathcal{R}_2 sú relácie ekvivalencie na A . Dokážte alebo vyvráťte:
 - i. Relácia $\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2$ je tiež ekvivalencia.
 - ii. Relácia $\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$ je tiež ekvivalencia.
- (b) Pre každé z nasledujúcich tvrdení o reláciách na množine A , kde $|A| = n$, určite, či je pravdivé alebo nepravdivé. Ak je nepravdivé, uveďte kontrapríklad.
 - i. Ak \mathcal{R} je relácia na A a $|\mathcal{R}| \geq n$, tak \mathcal{R} je reflexívna.
 - ii. Ak \mathcal{R} je ekvivalencia na A , tak $n \leq |\mathcal{R}| \leq n^2$.

Riešenie 4. príkladu

Táto časť obsahuje riešenie 4. príkladu.

5. príklad

- (a) Na množine všetkých reálnych čísel \mathcal{R} definujeme reláciu \cong nasledovne:

$$a \cong b \text{ práve vtedy, keď } \sin(a) = \sin(b).$$

Ukážte, že \cong je relácia ekvivalencie. Popíšte triedu ekvivalencie prvku $x = \pi$.

- (b) Na množine všetkých binárnych reťazcov dĺžky 5 definujeme reláciu \sim nasledovne:

$r_1 \sim r_2$ práve vtedy, keď počet jednotiek v $r_1 =$ počet jednotiek v $r_2 \pmod{2}$.

Ukážte, že \sim je relácia ekvivalencie. Popíšte triedu ekvivalencie prvku $r = 10011$.

Riešenie 5. príkladu

Táto časť obsahuje riešenie 5. príkladu.