Množinové identity

(príprava na záverečný test)

Ján Komara

17. novembra 2019

1 Úloha. Nech A, B, C sú ľubovolné množiny. Dokážte, že platí

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C \tag{1}$$
$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C). \tag{2}$$

Dôkaz. (1): Dokážeme, že obidve množiny majú rovnaké prvky, t. j.

$$\forall x \Big(x \in A \setminus (B \cup C) \leftrightarrow x \in (A \setminus B) \setminus C \Big).$$

Zvoľme si ľubovolný prvok x. Postupnými úpravami dostaneme

$$\begin{aligned}
& x \in A \setminus (B \cup C) \Leftrightarrow \{\text{definícia rozdielu množín}\} \\
& x \in A \wedge x \notin B \cup C \Leftrightarrow \{\text{definícia zjednotenia množín}\} \\
& x \in A \wedge \neg(x \in B \vee x \in C) \Leftrightarrow \\
& x \in A \wedge x \notin B \wedge x \notin C \Leftrightarrow \{\text{definícia rozdielu množín}\} \\
& x \in A \setminus B \wedge x \notin C \Leftrightarrow \{\text{definícia rozdielu množín}\} \\
& x \in (A \setminus B) \setminus C.
\end{aligned}$$

(2): Dokážeme, že obidve množiny majú rovnaké prvky, t. j.

$$\forall x \Big(x \in A \setminus (B \cap C) \leftrightarrow x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C) \Big).$$

Zvoľme si ľubovolný prvok x. Postupnými úpravami dostaneme

$$\begin{aligned}
& x \in A \setminus (B \cap C) \Leftrightarrow \{\text{definícia rozdielu množín}\} \\
& x \in A \wedge x \notin B \cap C \Leftrightarrow \{\text{definícia prieniku množín}\} \\
& x \in A \wedge \neg(x \in B \wedge x \in C) \Leftrightarrow \\
& x \in A \wedge (x \notin B \vee x \notin C) \Leftrightarrow \\
& x \in A \wedge x \notin B \vee x \in A \wedge x \notin C \Leftrightarrow \{\text{definícia rozdielu množín}\} \\
& x \in A \setminus B \vee x \in A \setminus C \Leftrightarrow \{\text{definícia zjednotenia množín}\} \\
& x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C).
\end{aligned}$$

□

2 Úloha. Nech A a B sú podmnožiny základnej množiny U. Dokážte, že platí

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \tag{1}$$
$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}. \tag{2}$$

Dôkaz. (1): Dokážeme, že obidve množiny majú rovnaké prvky, t. j.

$$\forall x{\in}U\Big(x \in \overline{A \cup B} \leftrightarrow x \in \overline{A} \cap \overline{B}\Big).$$

Zvoľme si ľubovolný prvok $x \in U$. Postupnými úpravami dostaneme

$$\begin{aligned}
&x \in \overline{A \cup B} \Leftrightarrow \{\text{definícia doplnku množiny}\}\\
&x \notin A \cup B \Leftrightarrow \{\text{definícia zjednotenia množín}\}\\
&\neg(x \in A \vee x \in B) \Leftrightarrow\\
&x \notin A \wedge x \notin B \Leftrightarrow \{\text{definícia doplnku množiny}\}\\
&x \in \overline{A} \wedge x \in \overline{B} \Leftrightarrow \{\text{definícia prieniku množín}\}\\
&x \in \overline{A} \cap \overline{B}.
\end{aligned}$$

(2): Dokážeme, že obidve množiny majú rovnaké prvky, t. j.

$$\forall x{\in}U\Big(x \in \overline{A \cap B} \leftrightarrow x \in \overline{A} \cup \overline{B}\Big).$$

Zvoľme si ľubovolný prvok $x \in U$. Postupnými úpravami dostaneme

$$\begin{aligned}
&x \in \overline{A \cap B} \Leftrightarrow \{\text{definícia doplnku množiny}\}\\
&x \notin A \cap B \Leftrightarrow \{\text{definícia prieniku množín}\}\\
&\neg(x \in A \wedge x \in B) \Leftrightarrow\\
&x \notin A \vee x \notin B \Leftrightarrow \{\text{definícia doplnku množiny}\}\\
&x \in \overline{A} \vee x \in \overline{B} \Leftrightarrow \{\text{definícia zjednotenia množín}\}\\
&x \in \overline{A} \cup \overline{B}.
\end{aligned}$$

□

3 Úloha. Nech A, B sú ľubovolné množiny. Dokážte, že platí

$$\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B) \tag{1}$$
$$\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B). \tag{2}$$

Návod. V dôkaze doporučujeme využiť niektorú z nasledujúcich vlastností:

$$C \subseteq A \vee C \subseteq B \to C \subseteq A \cup B \tag{3}$$
$$C \subseteq A \cap B \leftrightarrow C \subseteq A \wedge C \subseteq B. \tag{4}$$

Dôkaz. (1): Dokážeme, že prvá množina je podmnožinou druhej, t. j.

$$\forall C\Big(C \in \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \to C \in \mathcal{P}(A \cup B)\Big).$$

Zvoľme si ľubovolný prvok C. Postupnými úpravami dostaneme

$$\begin{aligned}
&C \in \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \Rightarrow \{\text{definícia zjednotenia množín}\}\\
&C \in \mathcal{P}(A) \vee C \in \mathcal{P}(B) \Rightarrow \{\text{definícia potenčnej množiny}\}\\
&C \subseteq A \vee C \subseteq B \overset{(3)}{\Rightarrow}\\
&C \subseteq A \cup B \Rightarrow \{\text{definícia potenčnej množiny}\}\\
&C \in \mathcal{P}(A \cup B).
\end{aligned}$$

(2): Dokážeme, že obidve množiny majú rovnaké prvky, t. j.

$$\forall C\Big(C \in \mathcal{P}(A \cap B) \leftrightarrow C \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)\Big).$$

Zvoľme si ľubovolný prvok C. Postupnými úpravami dostaneme

$$\begin{aligned}
&C \in \mathcal{P}(A \cap B) \Leftrightarrow \{\text{definícia potenčnej množiny}\}\\
&C \subseteq A \cup B \overset{(4)}{\Leftrightarrow}\\
&C \subseteq A \wedge C \subseteq B \Leftrightarrow \{\text{definícia potenčnej množiny}\}\\
&C \in \mathcal{P}(A) \wedge C \in \mathcal{P}(B) \Leftrightarrow \{\text{definícia prieniku množín}\}\\
&C \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B).
\end{aligned}$$

□

4 Úloha. Nech $R \subseteq A \times B$ a $S \subseteq B \times C$. Dokážte, že platí

$$(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}.$$

Dôkaz. Dokážeme, že binárne relácie na oboch stranách rovnosti majú rovnaké prvky, t. j.

$$\forall z{\in}C\,\forall x{\in}A\Big((z,x) \in (R \circ S)^{-1} \leftrightarrow (z,x) \in S^{-1} \circ R^{-1}\Big).$$

Nech $z \in C$ a $x \in A$ sú ľubovolné prvky. Postupnými úpravami dostaneme

$$\begin{aligned}
&(z,x) \in (R \circ S)^{-1} \Leftrightarrow \{\text{definícia opačnej relácie}\}\\
&(x,z) \in R \circ S \Leftrightarrow \{\text{definícia zloženej relácie}\}\\
&\exists y{\in}B\Big((x,y) \in R \wedge (y,z) \in S\Big) \Leftrightarrow\\
&\exists y{\in}B\Big((y,z) \in S \wedge (x,y) \in R\Big) \Leftrightarrow \{\text{definícia opačnej relácie}\}\\
&\exists y{\in}B\Big((z,y) \in S^{-1} \wedge (y,x) \in R^{-1}\Big) \Leftrightarrow \{\text{definícia zloženej relácie}\}\\
&(z,x) \in S^{-1} \circ R^{-1}.
\end{aligned}$$

□

5 Úloha. Nech $R \subseteq A \times B$, $X_1 \subseteq A$ a $X_2 \subseteq A$. Dokážte, že platí

$$R[X_1 \cup X_2] = R[X_1] \cup R[X_2] \tag{1}$$
$$R[X_1 \cap X_2] \subseteq R[X_1] \cap R[X_2]. \tag{2}$$

Dôkaz. (1): Dokážeme, že obidve množiny majú rovnaké prvky, t. j.

$$\forall y{\in}B\Big(y \in R[X_1 \cup X_2] \leftrightarrow y \in R[X_1] \cup R[X_2]\Big).$$

Nech $y \in B$ je ľubovolný prvok. Postupnými úpravami dostaneme

$$\begin{aligned}
& y \in R[X_1 \cup X_2] \Leftrightarrow \{\text{definícia obrazu množiny}\} \\
& \exists x{\in}A\Big(x \in X_1 \cup X_2 \wedge (x,y) \in R\Big) \Leftrightarrow \{\text{definícia zjednotenia množín}\} \\
& \exists x{\in}A\Big((x \in X_1 \vee x \in X_2) \wedge (x,y) \in R\Big) \Leftrightarrow \\
& \exists x{\in}A\bigg(\Big(x \in X_1 \wedge (x,y) \in R\Big) \vee \Big(x \in X_2 \wedge (x,y) \in R\Big)\bigg) \Leftrightarrow \\
& \exists x{\in}A\Big(x \in X_1 \wedge (x,y) \in R\Big) \vee \exists x{\in}A\Big(x \in X_2 \wedge (x,y) \in R\Big) \Leftrightarrow \\
& \hfill \{\text{definícia obrazu množiny}\} \\
& y \in R[X_1] \vee y \in R[X_2] \Leftrightarrow \{\text{definícia zjednotenia množín}\} \\
& y \in R[X_1] \cup R[X_2].
\end{aligned}$$

(2): Dokážeme, že prvá množina je podmnožinou druhej, t. j.

$$\forall y{\in}B\Big(y \in R[X_1 \cap X_2] \rightarrow y \in R[X_1] \cap R[X_2]\Big).$$

Nech $y \in B$ je ľubovolný prvok. Postupnými úpravami dostaneme

$$\begin{aligned}
& y \in R[X_1 \cap X_2] \Rightarrow \{\text{definícia obrazu množiny}\} \\
& \exists x{\in}A\Big(x \in X_1 \cap X_2 \wedge (x,y) \in R\Big) \Rightarrow \{\text{definícia prieniku množín}\} \\
& \exists x{\in}A\Big(x \in X_1 \wedge x \in X_2 \wedge (x,y) \in R\Big) \Rightarrow \\
& \exists x{\in}A\Big(x \in X_1 \wedge (x,y) \in R \wedge x \in X_2 \wedge (x,y) \in R\Big) \Rightarrow \\
& \exists x{\in}A\Big(x \in X_1 \wedge (x,y) \in R\Big) \wedge \exists x{\in}A\Big(x \in X_2 \wedge (x,y) \in R\Big) \Rightarrow \\
& \hfill \{\text{definícia obrazu množiny}\} \\
& y \in R[X_1] \wedge y \in R[X_2] \Rightarrow \{\text{definícia prieniku množín}\} \\
& y \in R[X_1] \cap R[X_2].
\end{aligned}$$

□

6 Úloha. Nech $f : A \to B$, $X_1 \subseteq A$ a $X_2 \subseteq A$. Dokážte, že platí

$$f(X_1 \cup X_2) = f(X_1) \cup f(X_2) \tag{1}$$
$$f(X_1 \cap X_2) \subseteq f(X_1) \cap f(X_2). \tag{2}$$

Dôkaz. (1): Dokážeme, že obidve množiny majú rovnaké prvky, t. j.

$$\forall y{\in}B\Big(y \in f(X_1 \cup X_2) \leftrightarrow y \in f(X_1) \cup f(X_2)\Big).$$

Nech $y \in B$ je ľubovolný prvok. Postupnými úpravami dostaneme

$$\begin{aligned}
&y \in f(X_1 \cup X_2) \Leftrightarrow \{\text{definícia obrazu množiny}\}\\
&\exists x{\in}A\Big(x \in X_1 \cup X_2 \wedge y = f(x)\Big) \Leftrightarrow \{\text{definícia zjednotenia množín}\}\\
&\exists x{\in}A\Big((x \in X_1 \vee x \in X_2) \wedge y = f(x)\Big) \Leftrightarrow\\
&\exists x{\in}A\bigg(\Big(x \in X_1 \wedge y = f(x)\Big) \vee \Big(x \in X_2 \wedge y = f(x)\Big)\bigg) \Leftrightarrow\\
&\exists x{\in}A\Big(x \in X_1 \wedge y = f(x)\Big) \vee \exists x{\in}A\Big(x \in X_2 \wedge y = f(x)\Big) \Leftrightarrow\\
&\hfill \{\text{definícia obrazu množiny}\}\\
&y \in f(X_1) \vee y \in f(X_2) \Leftrightarrow \{\text{definícia zjednotenia množín}\}\\
&y \in f(X_1) \cup f(X_2).
\end{aligned}$$

(2): Dokážeme, že prvá množina je podmnožinou druhej, t. j.

$$\forall y{\in}B\Big(y \in f(X_1 \cap X_2) \to y \in f(X_1) \cap f(X_2)\Big).$$

Nech $y \in B$ je ľubovolný prvok. Postupnými úpravami dostaneme

$$\begin{aligned}
&y \in f(X_1 \cap X_2) \Rightarrow \{\text{definícia obrazu množiny}\}\\
&\exists x{\in}A\Big(x \in X_1 \cap X_2 \wedge y = f(x)\Big) \Rightarrow \{\text{definícia prieniku množín}\}\\
&\exists x{\in}A\Big(x \in X_1 \wedge x \in X_2 \wedge y = f(x)\Big) \Rightarrow\\
&\exists x{\in}A\Big(x \in X_1 \wedge y = f(x) \wedge x \in X_2 \wedge y = f(x)\Big) \Rightarrow\\
&\exists x{\in}A\Big(x \in X_1 \wedge y = f(x)\Big) \wedge \exists x{\in}A\Big(x \in X_2 \wedge y = f(x)\Big) \Rightarrow\\
&\hfill \{\text{definícia obrazu množiny}\}\\
&y \in f(X_1) \wedge y \in f(X_2) \Rightarrow \{\text{definícia prieniku množín}\}\\
&y \in f(X_1) \cap f(X_2).
\end{aligned}$$

□

7 Úloha. Nech $f : A \to B$, $Y_1 \subseteq B$ a $Y_2 \subseteq B$. Dokážte, že platí

$$f^{-1}(Y_1 \cup Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2) \tag{1}$$
$$f^{-1}(Y_1 \cap Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cap f^{-1}(Y_2). \tag{2}$$

Dôkaz. (1): Dokážeme, že obidve množiny majú rovnaké prvky, t. j.

$$\forall x{\in}A\Big(x \in f^{-1}(Y_1 \cup Y_2) \leftrightarrow x \in f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2)\Big).$$

Nech $x \in A$ je ľubovolný prvok. Postupnými úpravami dostaneme

$$\begin{aligned}
&x \in f^{-1}(Y_1 \cup Y_2) \Leftrightarrow \{\text{definícia vzoru množiny}\}\\
&f(x) \in Y_1 \cup Y_2 \Leftrightarrow \{\text{definícia zjednotenia množín}\}\\
&f(x) \in Y_1 \vee f(x) \in Y_2 \Leftrightarrow \{\text{definícia vzoru množiny}\}\\
&x \in f^{-1}(Y_1) \vee x \in f^{-1}(Y_2)\{\text{definícia zjednotenia množín}\}\\
&x \in f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2).
\end{aligned}$$

(2): Dokážeme, že obidve množiny majú rovnaké prvky, t. j.

$$\forall x{\in}A\Big(x \in f^{-1}(Y_1 \cap Y_2) \leftrightarrow x \in f^{-1}(Y_1) \cap f^{-1}(Y_2)\Big).$$

Nech $x \in A$ je ľubovolný prvok. Postupnými úpravami dostaneme

$$\begin{aligned}
&x \in f^{-1}(Y_1 \cap Y_2) \Leftrightarrow \{\text{definícia vzoru množiny}\}\\
&f(x) \in Y_1 \cap Y_2 \Leftrightarrow \{\text{definícia prieniku množín}\}\\
&f(x) \in Y_1 \wedge f(x) \in Y_2 \Leftrightarrow \{\text{definícia vzoru množiny}\}\\
&x \in f^{-1}(Y_1) \wedge x \in f^{-1}(Y_2)\{\text{definícia prieniku množín}\}\\
&x \in f^{-1}(Y_1) \cap f^{-1}(Y_2).
\end{aligned}$$

□

8 Úloha. Dokážte, že ak $f : A \to B$ a $g : B \to C$ sú injektívne zobrazenia, potom aj ich kompozícia $f \circ g : A \to C$ je tiež injektívne zobrazenie.

Dôkaz. Našim cieľom je dokázať

$$\forall x_1{\in}A\forall x_2{\in}A\Big(x_1 \neq x_2 \to (f \circ g)(x_1) \neq (f \circ g)(x_2)\Big).$$

Nech $x_1, x_2 \in A$ sú ľubovolné prvky také, že $x_1 \neq x_2$. Z injektívnosti zobrazenia f plynie, že $f(x_1) \neq f(x_2)$. Z injektívnosti zobrazenia g dostaneme, že $g\,f(x_1) \neq g\,f(x_2)$. Odtiaľ a na základe definície zloženého zobrazenia dostaneme, že platí

$$(f \circ g)(x_1) = g\,f(x_1) \neq g\,f(x_2) = (f \circ g)(x_2).$$

Zobrazenie $f \circ g$ je teda injektívne. □

9 Úloha. Nech $f : A \to B$ a $g : B \to C$ sú zobrazenia také, že ich kompozícia $f \circ g : A \to C$ je injektívne zobrazenie. Dokážte, že aj f je injektívne zobrazenie.

Dôkaz. Našim cieľom je dokázať

$$\forall x_1{\in}A \forall x_2{\in}A \Big(x_1 \neq x_2 \to f(x_1) \neq f(x_2) \Big).$$

Nech $x_1, x_2 \in A$ sú ľubovolné prvky také, že $x_1 \neq x_2$. Z injektívnosti zobrazenia $f \circ g$ podľa definície zloženého zobrazenia plynie, že

$$g\, f(x_1) = (f \circ g)(x_1) \neq (f \circ g)(x_2) = g\, f(x_2).$$

Odtiaľ okamžite dostaneme požadovanú nerovnosť $f(x_1) \neq f(x_2)$. $\square$

10 Úloha. Dokážte, že ak $f : A \to B$ a $g : B \to C$ sú surjektívne zobrazenia, potom aj ich kompozícia $f \circ g : A \to C$ je tiež surjektívne zobrazenie.

Dôkaz. Našim cieľom je dokázať

$$\forall z{\in}C \exists x{\in}A\, z = (f \circ g)(x).$$

Nech $z \in C$ je ľubovolný prvok. Zo surjektívnosti g plynie, že existuje $y \in B$ také, že $z = g(y)$. Zo surjektívnosti f plynie, že existuje $x \in A$ také, že $y = f(x)$. Odtiaľ podľa definície zloženého zobrazenia dostaneme, že

$$z = g(y) = g\, f(x) = (f \circ g)(x).$$

Zobrazenie $f \circ g$ je teda surjekcia. $\square$

11 Úloha. Nech $f : A \to B$ a $g : B \to C$ sú zobrazenia také, že ich kompozícia $f \circ g : A \to C$ je surjektívne zobrazenie. Dokážte, že aj g je surjektívne zobrazenie.

Dôkaz. Našim cieľom je dokázať

$$\forall z{\in}C \exists y{\in}B\, z = g(y).$$

Nech $z \in C$ je ľubovolný prvok. Zo surjektívnosti $f \circ g$ plynie, že existuje $x \in A$ také, že $z = (f \circ g)(x)$. Odtiaľ pre $y = f(x) \in B$ z definície zloženého zobrazenia dostaneme, že platí

$$g(y) = g\, f(x) = (f \circ g)(x) = z.$$

Zobrazenie g je teda surjekcia. $\square$