1-AIN-121 Diskrétna matematika (1)

Zimný semester 2023/24

13. prednáška

Ján Komara

Obsah prednášky

Zopakovanie

Téoria pravdepodobnosti

Téoria (počet) pravdepodobnosti je tá časť matematiky, ktorá hľadá zákonitosti, podľa ktorých sa správa náhoda.

Hromadný dej

Hromadný dej je dej, ktorý teoreticky môžeme opakovane ľubovoľnekrát realizovať pri rovnakom komplexe podmienok.

Náhodný experiment

Náhodný experiment (pokus) je realizácia hromadného deja pri danom komplexe podmienok.

Náhodná udalosť

Náhodná udalosť (jav) je určitý výrok spätý s uvažovaným hromadným dejom. Elementárny jav je jednotlivý výsledok pokusu.

Zopakovanie

Relatívna početnosť náhodnej udalosti

Relatívna početnosť javu je podiel tých prípadov, kedy udalosť nastala, k počtu všetkých pokusov.

Pravdepodobnosť náhodnej udalosti

Pravdepodobnosť javu je hodnota, ku ktorému sa pri mnohonásobnej realizácií hromadného deja blíži relatívna početnosť tejto udalosti.

Určenie pravdepodobnosti

- Reálnym experimentovaním.
- Simulovaním experimentovania na počítači.
- Myšlienkovým experimentom.
- Výpočtom podľa vzorcov.

Zopakovanie

Priestor náhodných udalostí

Nech Ω je neprázdna konečná množina.

- Prvky množiny Ω nazývame elementárne udalosti (javy).
- Podmnožiny množiny Ω nazývame náhodné udalosti (javy).
- Konvencia: elementárny jav $\omega \in \Omega$ stotožňujeme s jednoprvkovou udalosťou $\{\omega\} \subseteq \Omega$.

Základne operácie na náhodných udalostiach

- Istý jav Ω.
- Nemožný jav $\emptyset$.
- Zjednotenie javov $A \cup B$.
- Prienik javov $A \cap B$.
- Doplnok javu (opačná udalosť) $\overline{A}$.

Zopakovanie

Konečný pravdepodobnostný priestor

Nech Ω je konečná množina elementárnych javov a nech P je reálna funkcia na Ω taká, že

$$\forall \omega \in \Omega \, P(\omega) \geq 0$$
$$\sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) = 1.$$

Pravdepodobnosť $P(A)$ náhodnej udalosti $A \subseteq \Omega$ definujeme ako

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\omega).$$

Usporiadaná dvojica (Ω, P) sa nazýva konečný pravdepodobnostný priestor a funkcia P pravdepodobnostná miera na tomto priestore.

Zopakovanie

Klasický pravdepodobnostný priestor

Nech (Ω, P) je konečný pravdepodobnostný priestor s uniformným rozdelením pravdepodobnosti:

$$\forall \omega \in \Omega\, P(\omega) = \frac{1}{|\Omega|}.$$

Elementárne udalosti majú rovnakú pravdepodobnosť.

Veta

Pre každý jav A klasického pravdepodobnostného priestoru (Ω, P) platí vzťah

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

Zopakovanie

Veta

Nech (Ω, P) je konečný pravdepodobnostný priestor. Potom pre každú náhodnú udalosť $A \subseteq \Omega$ a $B \subseteq \Omega$ platí:

$$P(\emptyset) = 0 \wedge P(\Omega) = 1$$
$$A \subseteq B \to P(A) \leq P(B)$$
$$0 \leq P(A) \leq 1$$
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

Dôsledok

Ak A a B sú disjunktné (navzájom výlučné) javy, potom

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Zopakovanie

Literatúra

- Rastislav Potocký a kolektív.: Zbierka úloh z pravdepodobnosti a matematickej štatistiky. Bratislava: Alfa, 1986.
- Harman, R., Hönschová, E., Somorčík, J.: Zbierka úloh zo základov teórie pravdepodobnosti. Bratislava: PACI, 2009.
- Bachratý, H., Grendár, M., Bachratá, K.: Ako sa počíta pravdepodobnosť. Žilina: Žilinská univerzita, 2010
- Harman, R., Filová, L.: Základy pravdepodobnosti pre študentov informatiky a dátovej vedy. Bratislava: KEC FMFI UK, 2022.

Definícia podmienenej pravdepodobnosti

Nech A a B sú náhodné udalosti také, že $P(A) > 0$. Potom hodnotu

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

nazývame pravdepodobnosť javu B za podmienky A.

Zdôvodenie

Označenie

$$\begin{aligned} n &= \text{počet všetkých pokusov,} \\ n_C &= \text{počet všetkých prípadov, keď nastal jav } C, \\ \frac{n_C}{n} \approx p &= \text{relatívna početnosť javu } C \text{ kolíše okolo hodnoty } p. \end{aligned}$$

Čiže

$$\frac{n_{A\cap B}}{n_A} \approx P(B \mid A) \qquad \frac{n_{A\cap B}}{n} \approx P(A\cap B) \qquad \frac{n_A}{n} \approx P(A).$$

Odtiaľ

$$\frac{n_{A\cap B}}{n_A} = \frac{\frac{n_{A\cap B}}{n}}{\frac{n_A}{n}} \approx \frac{P(A\cap B)}{P(A)}.$$

Základná vlastnosť podmienenej pravdepodobnosti

Nech (Ω, P) je pravdepodobnostný priestor. Nech ďalej $A \subseteq \Omega$ je náhodná udalosť taká, že $P(A) > 0$. Položme

$$P_A(B) = P(B \mid A).$$

Potom aj (Ω, P_A) je pravdepodobnostný priestor.

Dôkaz

Prvá vlastnosť pravdepodobnostnej miery:

$$P_A(B) = P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \geq 0.$$

Druhá vlastnosť pravdepodobnostnej miery:

$$\sum_{\omega \in \Omega} P_A(\omega) = P_A(\Omega) = P(\Omega \mid A) = \frac{P(A \cap \Omega)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1.$$

Veta o násobení pravdepodobností

Nech A a B sú náhodné udalosti také, že $P(A) > 0$. Potom platí

$$P(A \cap B) = P(A)P(B \mid A). \tag{1}$$

Veta

Nech A a B sú náhodné udalosti také, že $P(A) > 0$ a $P(B) > 0$. Potom platí

$$P(B)P(A \mid B) = P(A)P(B \mid A).$$

Dôkaz

$$P(B)P(A \mid B) \stackrel{(1)}{=} P(B \cap A) = P(A \cap B) \stackrel{(1)}{=} P(A)P(B \mid A).$$

Podmienená pravdepodobnosť

Ťahanie dvoch gulôčok za sebou bez vrátenia

Príklad

V urne máme 6 bielych a 4 čierne guľôčky:

$$\bigcirc \; \bullet \; \bigcirc \; \bigcirc \; \bullet \; \bullet \; \bigcirc \; \bigcirc \; \bullet \; \bigcirc.$$

Náhodne ťaháme dvakrát za sebou jednu guľôčku (bez vrátenia). Aká je pravdepodobnosť, že

- obe vytiahnuté guľôčky sú biele? Označenie $(\circ, \circ)$.
- prvá vytiahnutá guľôčka je biela a druhá čierna? $(\circ, \bullet)$.
- prvá vytiahnutá guľôčka je čierna a druhá biela? $(\bullet, \circ)$.
- obe vytiahnuté guľôčky sú čierne? $(\bullet, \bullet)$.

Čo je pravdepodobnejšie:

- to, že vytiahneme rovnako farebné guľôčky, alebo to, že vytiahneme rôznofarebné guľôčky?

Podmienená pravdepodobnosť

Ťahanie dvoch gulôčok za sebou bez vrátenia

Označenie náhodných javov

- $\bigcirc_1 = \{(\circ, \circ), (\circ, \bullet)\}$ = prvá vytiahnutá guľôčka je biela.
- $\bigcirc_2 = \{(\circ, \circ), (\bullet, \circ)\}$ = druhá vytiahnutá guľôčka je biela.
- $\CIRCLE_1 = \{(\bullet, \circ), (\bullet, \bullet)\}$ = prvá vytiahnutá guľôčka je čierna.
- $\CIRCLE_2 = \{(\circ, \bullet), (\bullet, \bullet)\}$ = druhá vytiahnutá guľôčka je čierna.

Aká je pravdepodobnosť, že

- $\bigcirc_1 \cap \bigcirc_2 = \{(\circ, \circ)\}$ = obe vytiahnuté guľôčky sú biele?
- $\bigcirc_1 \cap \CIRCLE_2 = \{(\circ, \bullet)\}$ = prvá vytiahnutá guľôčka je biela a druhá čierna?
- $\CIRCLE_1 \cap \bigcirc_2 = \{(\bullet, \circ)\}$ = prvá vytiahnutá guľôčka je čierna a druhá biela?
- $\CIRCLE_1 \cap \CIRCLE_2 = \{(\bullet, \bullet)\}$ = obe vytiahnuté guľôčky sú čierne?

Podmienená pravdepodobnosť

Ťahanie dvoch gulôčok za sebou bez vrátenia

Výpočet pravdepodobností

$$\bigcirc \quad \bigcirc \quad \bigcirc \quad \bigcirc \quad \bigcirc \quad \bigcirc \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet.$$

$$P\left(\bigcirc_1 \cap \bigcirc_2\right) = P\left(\bigcirc_1\right) P\left(\bigcirc_2 | \bigcirc_1\right) = \frac{6}{10} \times \frac{5}{9} = \frac{30}{90} = \frac{5}{15}$$

$$P\left(\bigcirc_1 \cap \bullet_2\right) = P\left(\bigcirc_1\right) P\left(\bullet_2 | \bigcirc_1\right) = \frac{6}{10} \times \frac{4}{9} = \frac{24}{90} = \frac{4}{15}$$

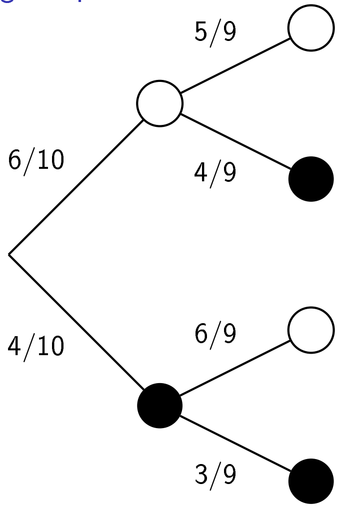
$$P\left(\bullet_1 \cap \bigcirc_2\right) = P\left(\bullet_1\right) P\left(\bigcirc_2 | \bullet_1\right) = \frac{4}{10} \times \frac{6}{9} = \frac{24}{90} = \frac{4}{15}$$

$$P\left(\bullet_1 \cap \bullet_2\right) = P\left(\bullet_1\right) P\left(\bullet_2 | \bullet_1\right) = \frac{4}{10} \times \frac{3}{9} = \frac{12}{90} = \frac{2}{15}.$$

Podmienená pravdepodobnosť

Ťahanie dvoch gulôčok za sebou bez vrátenia

Stromový diagram pokusu



$$\frac{6}{10} \times \frac{5}{9} = \frac{5}{15}$$

$$\frac{6}{10} \times \frac{4}{9} = \frac{4}{15}$$

$$\frac{4}{10} \times \frac{6}{9} = \frac{4}{15}$$

$$\frac{4}{10} \times \frac{3}{9} = \frac{2}{15}$$

Podmienená pravdepodobnosť

Ťahanie dvoch gulôčok za sebou bez vrátenia

Na túto otázku sme zabudli!

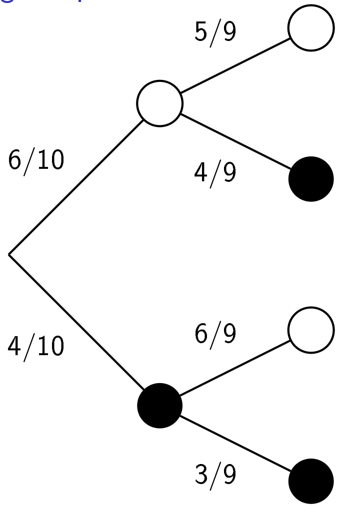
Čo je pravdepodobnejšie:

- to, že vytiahneme rovnako farebné guľôčky, alebo to, že vytiahneme rôznofarebné guľôčky?

Podmienená pravdepodobnosť

Ťahanie dvoch gulôčok za sebou bez vrátenia

Stromový diagram pokusu



$$\frac{6}{10} \times \frac{5}{9} = \frac{5}{15}$$

$$\frac{6}{10} \times \frac{4}{9} = \frac{4}{15}$$

$$\frac{4}{10} \times \frac{6}{9} = \frac{4}{15}$$

$$\frac{4}{10} \times \frac{3}{9} = \frac{2}{15}$$

Pomocné pojmy

Javy systému udalostí $H_1, H_2 \ldots, H_n$ sú po dvoch výlučné, ak

$$H_i \cap H_j = \emptyset, \qquad \text{pre každé } i \neq j.$$

Zjednotenie konečného systému udalostí $H_1, H_2 \ldots, H_n$:

$$\bigcup_{i=1}^{n} H_i = H_1 \cup H_2 \cup \cdots \cup H_n.$$

Úplný systém udalostí

Náhodné udalosti $H_1, H_2 \ldots, H_n$ tvoria úplný systém udalostí (javu Ω), ak udalosti systému sú po dvoch výlučné a súčasne platí

$$\bigcup_{i=1}^{n} H_i = \Omega.$$

Podmienená pravdepodobnosť

Úplná pravdepodobnosť

Ťahanie dvoch gulôčok za sebou bez vrátenia

V urne máme 6 bielych a 4 čierne guľôčky:

$$\bigcirc \quad \bullet \quad \bigcirc \quad \bigcirc \quad \bullet \quad \bullet \quad \bigcirc \quad \bigcirc \quad \bullet \quad \bigcirc.$$

Náhodne ťaháme dvakrát za sebou jednu guľôčku (bez vrátenia).

Množina všetkých elementárnych javov

Istá udalosť Ω pozostáva z týchto štyroch elementárnych javov:

- $(\circ, \circ)$ = obe vytiahnuté guľôčky sú biele,
- $(\circ, \bullet)$ = prvá vytiahnutá guľôčka je biela a druhá čierna,
- $(\bullet, \circ)$ = prvá vytiahnutá guľôčka je čierna a druhá biela,
- $(\bullet, \bullet)$ = obe vytiahnuté guľôčky sú čierne.

Označenie náhodných javov

- $\bigcirc_1 = \{(\circ, \circ), (\circ, \bullet)\} =$ prvá vytiahnutá guľôčka je biela.
- $\bigcirc_2 = \{(\circ, \circ), (\bullet, \circ)\} =$ druhá vytiahnutá guľôčka je biela.
- $\newmoon_1 = \{(\bullet, \circ), (\bullet, \bullet)\} =$ prvá vytiahnutá guľôčka je čierna.
- $\newmoon_2 = \{(\circ, \bullet), (\bullet, \bullet)\} =$ druhá vytiahnutá guľôčka je čierna.

Úplný systém udalostí

Náhodné udalosti $\bigcirc_1, \newmoon_1$ tvoria úplný systém udalostí:

$$\bigcirc_1 \cap \newmoon_1 = \emptyset \qquad \bigcirc_1 \cup \newmoon_1 = \Omega.$$

Náhodné udalosti $\bigcirc_2, \newmoon_2$ tvoria úplný systém udalostí:

$$\bigcirc_2 \cap \newmoon_2 = \emptyset \qquad \bigcirc_2 \cup \newmoon_2 = \Omega.$$

Veta o úplnej pravdepodobnosti

Nech $H_1, H_2 \ldots, H_n$ je úplný systém náhodných udalostí s nenulovou pravdepodobnosťou. Potom pre každý náhodný jav A platí rovnosť

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A \mid H_i).$$

Dôkaz

Náhodné javy systému udalostí

$$H_1 \cap A, H_2 \cap A, \ldots, H_n \cap A$$

sú po dvoch výlučné a súčasne platí

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} (H_i \cap A).$$

Ako dôsledok pravidla súčtu a z vyjadrenia prieniku javov pomocou podmienenej pravdepodobnosti dostaneme

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i \cap A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) P(A \mid H_i).$$

Podmienená pravdepodobnosť

Úplná pravdepodobnosť

Ťahanie dvoch gulôčok za sebou bez vrátenia

Aká je pravdepodobnosť, že

- druhá vytiahnutá guľôčka je biela?

Riešenie

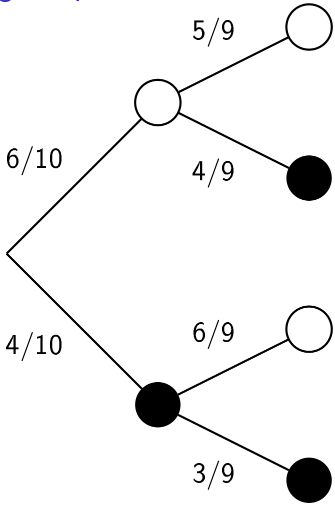
Podľa vzorca vo vete o úplnej pravdepodobnosti dostaneme

$$
\begin{aligned}
P\left(\bigcirc_2\right) &= P\left(\bigcirc_1\right) P\left(\bigcirc_2 \mid \bigcirc_1\right) + P\left(\bullet_1\right) P\left(\bigcirc_2 \mid \bullet_1\right) = \\
&= \frac{6}{10} \times \frac{5}{9} + \frac{4}{10} \times \frac{6}{9} = \frac{5}{15} + \frac{4}{15} = \\
&= \frac{9}{15} = \frac{6}{10} = P\left(\bigcirc_1\right).
\end{aligned}
$$

Podmienená pravdepodobnosť

Úplná pravdepodobnosť

Stromový diagram pokusu



$$\frac{6}{10} \times \frac{5}{9} = \frac{5}{15}$$

$$\frac{6}{10} \times \frac{4}{9} = \frac{4}{15}$$

$$\frac{4}{10} \times \frac{6}{9} = \frac{4}{15}$$

$$\frac{4}{10} \times \frac{3}{9} = \frac{2}{15}$$

Bayesova veta

Nech $P(A) > 0$ a $P(B) > 0$. Potom platí

$$P(A \mid B) = \frac{P(A)P(B \mid A)}{P(B)}.$$

Dôkaz

Tvrdenie plynie z identity

$$P(B)P(A \mid B) = P(A)P(B \mid A).$$

Dôsledok

Nech $H_1, H_2 \ldots, H_n$ je úplný systém náhodných udalostí s nenulovou pravdepodobnosťou. Potom pre každý náhodný jav B s nenulovou pravdepodobnosťou a každé číslo $i = 1, \ldots, n$ platí vzťah

$$P(H_i \mid B) = \frac{P(H_i)P(B \mid H_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(B \mid H_i)}.$$

Dôkaz

Tvrdenie plynie z Beyesovej vety a z vety o úplnej pravdepodobnosti

$$P(H_i \mid B) = \frac{P(H_i)P(B \mid H_i)}{P(B)} = \frac{P(H_i)P(B \mid H_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(B \mid H_i)}.$$

Podmienená pravdepodobnosť

Bayesova veta

Ťahanie dvoch gulôčok za sebou bez vrátenia

Aká je pravdepodobnosť, že

- prvá vytiahnutá guľôčka je čierna, keď vieme, že druhá vytiahnutá guľôčka je biela?

Riešenie

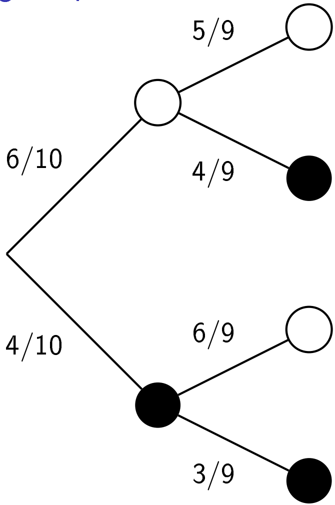
Podľa vzorca v dôsledku Bayesovej vety dostaneme

$$P\left(\bullet_1 \mid \bigcirc_2\right) = \frac{P\left(\bullet_1\right) P\left(\bigcirc_2 \mid \bullet_1\right)}{P\left(\bigcirc_2\right)} = \frac{\frac{4}{15}}{\frac{9}{15}} = \frac{4}{9}.$$

Podmienená pravdepodobnosť

Bayesova veta

Stromový diagram pokusu



$$\frac{6}{10} \times \frac{5}{9} = \frac{5}{15}$$

$$\frac{6}{10} \times \frac{4}{9} = \frac{4}{15}$$

$$\frac{4}{10} \times \frac{6}{9} = \frac{4}{15}$$

$$\frac{4}{10} \times \frac{3}{9} = \frac{2}{15}$$

Podmienená pravdepodobnosť

Diagnostikovanie chorôb v medicíne

Formulácia problému

Populáciu testujeme diagnostickým testom na prítomnosť ochorenia.

Senzitivita a špecificita

- Senzitivita je definovaná ako pravdepodobnosť, že test bude pozitívny u chorého subjektu.
- Špecificita je definovaná ako pravdepodobnosť, že test bude negatívny u subjektu, ktorý nemá dané ochorenie.

Pozitívna a negatívna prediktívna hodnota

- Pozitívna prediktívna hodnota (PPV) je pravdepodobnosť, že pacient s pozitívnym testom je naozaj chorý?
- Negatívna prediktívna hodnota (NPV) je pravdepodobnosť, že pacient s negatívnym testom je naozaj zdravý?

Prezentovanie výsledkov diagnostického testu

	Chorý	Zdravý
Pozitívny výsledok testu	Pravdivo pozitívny (TP)	Falošne pozitívny (FP)
Negatívny výsledok testu	Falošne negatívny (FN)	Pravdivo negatívny (TN)

$$\frac{\text{TP}}{\text{TP}+\text{FN}} \approx \text{Senzitivita} \qquad \frac{\text{TP}}{\text{TP}+\text{FP}} \approx \text{PPV}$$

$$\frac{\text{TN}}{\text{TN}+\text{FP}} \approx \text{Špecificita} \qquad \frac{\text{TN}}{\text{TN}+\text{FN}} \approx \text{NPV}$$

Príklad

Firma SlovMed s.r.o. vyvinula antigénový test na diagnostikovanie ochorenia COVID-19. Test ma senzitivitu 70% a špecificitu 99%. Výskyt tohto druhu ochorenia (prevalencia ochorenia) v populácii sa odhaduje na 2%.

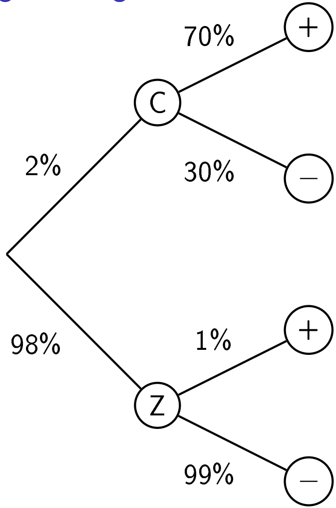
Označenie náhodných javov

- C = pacient má chorobu.
- Z = pacient nemá chorobu.
- $+ =$ test je pozitívny.
- $- =$ test je negatívny.

Podmienená pravdepodobnosť

Diagnostikovanie chorôb v medicíne

Stromový diagram diagnostického testu



$$2\% \times 70\% = 1{,}4\%$$

$$2\% \times 30\% = 0{,}6\%$$

$$98\% \times 1\% = 0{,}98\%$$

$$98\% \times 99\% = 97{,}02\%$$

Podmienená pravdepodobnosť

Diagnostikovanie chorôb v medicíne

Úloha

Určite pozitívnu prediktívna hodnotu testu — aká je pravdepodobnosť, že pacient s pozitívnym testom je naozaj chorý?

Riešenie

Podľa vzorca v dôsledku Bayesovej vety dostaneme

$$P\left(\mathrm{C} \mid +\right) =$$

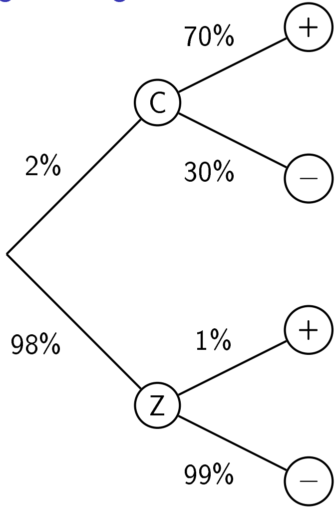
$$\frac{P(\mathrm{C})\, P\left(+ \mid \mathrm{C}\right)}{P(\mathrm{C})\, P\left(+ \mid \mathrm{C}\right) + P(\mathrm{Z})\, P\left(+ \mid \mathrm{Z}\right)} =$$

$$\frac{1{,}4\%}{1{,}4\% + 0{,}98\%} = \frac{1{,}4\%}{2{,}38\%} \approx 58{,}8\%.$$

Podmienená pravdepodobnosť

Diagnostikovanie chorôb v medicíne

Stromový diagram diagnostického testu



$2\% \times 70\% = 1{,}4\%$

$2\% \times 30\% = 0{,}6\%$

$98\% \times 1\% = 0{,}98\%$

$98\% \times 99\% = 97{,}02\%$

Podmienená pravdepodobnosť

Diagnostikovanie chorôb v medicíne

Úloha

Určite negatívnu prediktívnu hodnotu testu — aká je pravdepodobnosť, že pacient s negatívnym testom je naozaj zdravý?

Riešenie

Podľa vzorca v dôsledku Bayesovej vety dostaneme

$$P(\mathrm{Z} \mid -) =$$

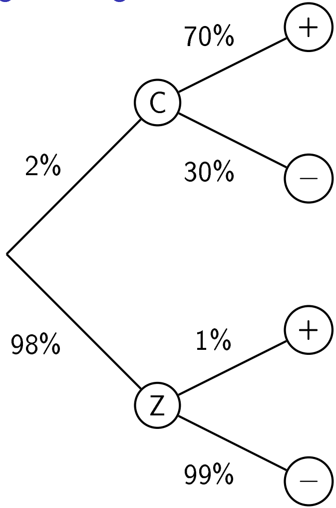
$$\frac{P(\mathrm{Z})\,P(- \mid \mathrm{Z})}{P(\mathrm{Z})\,P(- \mid \mathrm{Z}) + P(\mathrm{C})\,P(- \mid \mathrm{C})} =$$

$$\frac{97{,}02\%}{97{,}02\% + 0{,}6\%} = \frac{97{,}02\%}{97{,}62\%} \approx 99{,}4\%.$$

Podmienená pravdepodobnosť

Diagnostikovanie chorôb v medicíne

Stromový diagram diagnostického testu



$2\% \times 70\% = 1{,}4\%$

$2\% \times 30\% = 0{,}6\%$

$98\% \times 1\% = 0{,}98\%$

$98\% \times 99\% = 97{,}02\%$

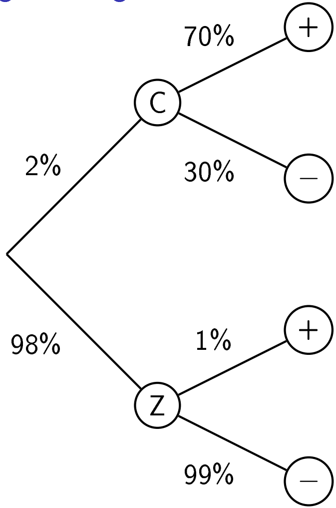
Myšlienkový experiment pre ideálny prípad

Predstavme si, že otestujeme 1000 ľudí. Predpokladajme, že relatívne početnosti elementárnych javov pre toto meranie odpovedajú ich pravdepodobnostiam. Vypočítajte hodnoty TP, FP, TN a FN.

Podmienená pravdepodobnosť

Diagnostikovanie chorôb v medicíne

Stromový diagram diagnostického testu



$2\% \times 70\% = 1{,}4\%$

$2\% \times 30\% = 0{,}6\%$

$98\% \times 1\% = 0{,}98\%$

$98\% \times 99\% = 97{,}02\%$

Podmienená pravdepodobnosť

Postupné násobenie pravdepododobností

Zopakovanie

Nech A a B sú náhodné udalosti. Potom platí

$$P(A \cap B) = P(A)P(B \mid A), \qquad \text{ak } P(A) > 0.$$

Veta

Nech $A_1, \ldots, A_n$ sú náhodné javy také, že

$$P(A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}) > 0.$$

Potom platí

$$P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) =$$

$$P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \cdots P(A_n \mid A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}).$$

Podmienená pravdepodobnosť

Postupné násobenie pravdepodododobností

Dôkaz pre $n = 4$

Postupnými úpravami dostaneme

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) =$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)P(A_4 \mid A_1 \cap A_2 \cap A_3) =$$

$$P(A_1 \cap A_2)P(A_3 \mid A_1 \cap A_2)P(A_4 \mid A_1 \cap A_2 \cap A_3) =$$

$$P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_1 \cap A_2)P(A_4 \mid A_1 \cap A_2 \cap A_3).$$

Úloha

Určte, aká je pravdepodobnosť nájdenia dvojice majúcej rovnaký deň narodenín (deň a mesiac) v skupine ľudí, ktorá má ten istý počet ako je na prednáške.

Pokyny

Vašu odpoveď zaraďte do jedného z nasledujúcich odhadov:

- veľmi pravdepodobné 90% – 100%,
- pravdepodobné 60% – 90%,
- náhodné 40% – 60%,
- nepravdepodobné 10% – 40%,
- veľmi nepravdepodobné 0% – 10%.

Príklad

Určte minimálny počet ľudí, v ktorej je aspoň 50% pravdepodobnosť nájdenia dvojice s rovnakým dňom narodenia (deň a mesiac).

Riešenie

- Základný súbor je usporiadaný (napr. podľa abecedy).
- Ignorujeme prestupné roky. Kalendárny rok má tak 365 dní.
- Predpokladáme rovnomerné rozdelenie narodenín počas roka.

Spočítame pravdepodobnosť komplementárneho problému zobecneného do tejto formy:

- Aká je pravdepodobnosť, že v náhodne vybratej skupine n ľudí má každý z nich narodeniny v iný deň?

Označme hľadanú pravdepodobnosť ako $\overline{P}(n)$. Hľadáme minimálne n také, že $P(n) = 1 - \overline{P}(n) \geq 50\%$

Podmienená pravdepodobnosť

Narodeninový problém

Uvažujeme tieto náhodné udalosti pre výber n osôb:

- $A_i =$ „i-tá osoba má narodeniny v inom dni ako tie pred ňou“.

Ľahko sa ukáže, že platí rovnosť

$$\overline{P}(n) = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots \cap A_n) =$$
$$P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdots P(A_n \mid A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}) =$$
$$\frac{365}{365} \times \frac{364}{365} \times \frac{363}{365} \times \cdots \times \frac{365-n+1}{365}.$$

Riešenie nášho pôvodného problému získame z tabuľky:

n	$P(n) = 1 - \overline{P}(n)$
21	$0{,}444 = 44{,}4\%$
22	$0{,}476 = 47{,}6\%$
23	$0{,}507 = 50{,}7\%$
24	$0{,}538 = 53{,}8\%$
25	$0{,}569 = 56{,}9\%$

V náhodne vybratej skupine 23 ľudí je aspoň 50% pravdepodobnosť nájdenia dvojice s rovnakým dňom narodenia.

Nezávislé náhodné udalosti

Hovoríme, že dva náhodné javy A a B sú (vzájomne) nezávislé, ak

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

V opačnom prípade hovoríme, že javy A a B sú závislé.

Veta

Nech $P(A) > 0$. Náhodné javy A a B sú nezávislé práve vtedy, keď

$$P(B \mid A) = P(B).$$

Dôkaz

Plynie priamo z definície podmienenej pravdepodobnosti:

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

Príklad

Opakovane hádžeme jednou mincou dva razy za sebou. Označenie náhodných udalostí ($i = 1, 2$):

- H_i = „hlava padne v i-tom hode“.
- Z_i = „znak padne v i-tom hode“.

Potom platí:

- H_1 a H_2 sú nezávislé náhodné javy, pretože
$$P(H_2 \mid H_1) = P(H_2) = \frac{1}{2}.$$
- H_1 a Z_1 sú závislé náhodné javy, pretože
$$P(H_1 \cap Z_1) = 0 \neq \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = P(H_1)P(Z_1).$$

Veta (Bernoulli)

Nech pravdepodobnosť náhodnej udalosti A je v každom jednotlivom pokuse tá istá a rovná p. Potom pravdepodobnosť k-násobného výskytu javu A v n nezávislých pokusoch je rovná číslu

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Dôkaz

Ilustrovaný na nasledujúcom príklade.

Nezávislosť udalostí

Ťahanie piatich gulôčok za sebou s vrátením

Príklad

V urne máme 6 bielych a 4 čierne guľôčky:

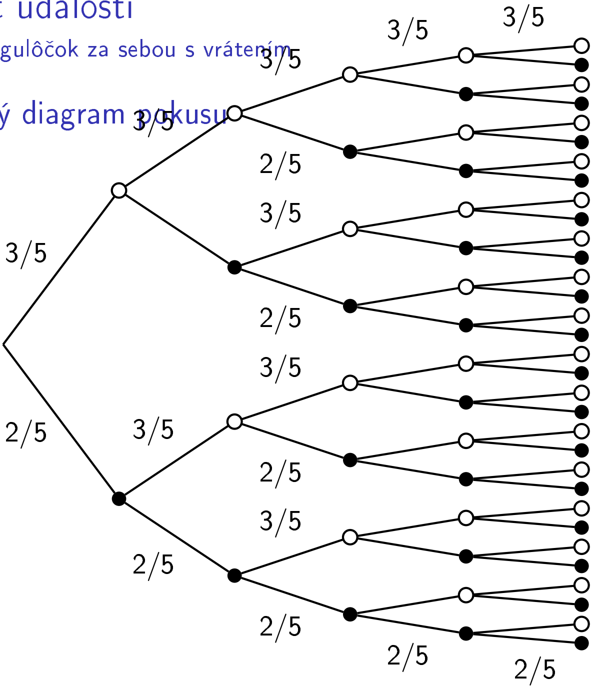
○ ● ○ ○ ● ● ○ ○ ● ○.

Náhodne ťaháme päťkrát za sebou jednu guľôčku tak, že po každom ťahu vytiahnutú guľôčku vrátime naspäť do urny.

Nezávislosť udalostí

Ťahanie piatich gulôčok za sebou s vrátením

Stromový diagram pokusu



Nezávislosť udalostí

Ťahanie piatich gulôčok za sebou s vrátením

Úloha

Aká je pravdepodobnosť, že

- prvá, druhá a štvrtá vytiahnutá guľôčka je biela, zvyšné čierne.

Riešenie

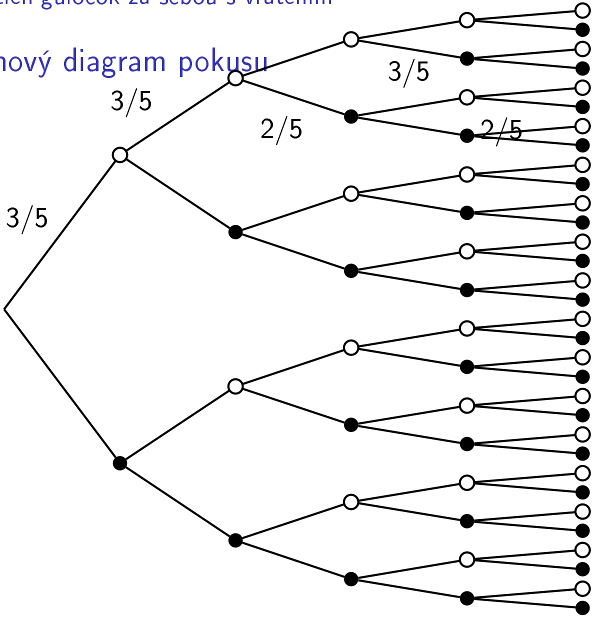
Postupnými úpravami dostaneme

$$
\begin{aligned}
&P\left(\bigcirc_1 \cap \bigcirc_2 \cap \CIRCLE_3 \cap \bigcirc_4 \cap \CIRCLE_5\right) = \\
&P\left(\bigcirc_1\right) \times P\left(\bigcirc_2 | \bigcirc_1\right) \times P\left(\CIRCLE_3 | \bigcirc_1 \cap \bigcirc_2\right) \times \\
&\qquad P\left(\bigcirc_4 | \bigcirc_1 \cap \bigcirc_2 \cap \CIRCLE_3\right) \times P\left(\CIRCLE_5 | \bigcirc_1 \cap \bigcirc_2 \cap \CIRCLE_3 \cap \bigcirc_4\right) = \\
&P\left(\bigcirc_1\right) \times P\left(\bigcirc_2\right) \times P\left(\CIRCLE_3\right) \times P\left(\bigcirc_4\right) \times P\left(\CIRCLE_5\right) = \\
&\frac{3}{5} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} = \left(\frac{3}{5}\right)^3 \left(\frac{2}{5}\right)^2 .
\end{aligned}
$$

Nezávislosť udalostí

Ťahanie piatich gulôčok za sebou s vrátením

Stromový diagram pokusu



$\left(\frac{3}{5}\right)^3 \left(\frac{2}{5}\right)^2$

Nezávislosť udalostí

Ťahanie piatich gulôčok za sebou s vrátením

Úloha

Aká je pravdepodobnosť, že

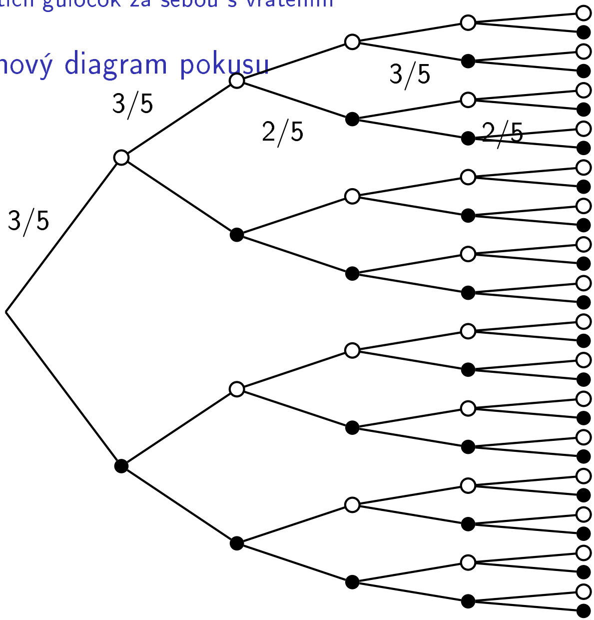
- biela guľôčka je vytiahnutá práve trikrát.

Riešenie

Nezávislosť udalostí

Ťahanie piatich gulôčok za sebou s vrátením

Stromový diagram pokusu



$$\left(\frac{3}{5}\right)^3\left(\frac{2}{5}\right)^2$$

Záver

Organizácia predmetu

- 5. domáca úloha
  - Opravovanie zatiaľ neskončilo.
  - O jeho skončení budete informovaní.
  - Až potom môžete reklamovať hodnotenie u svojho cvičiaceho.
- Náhradný termín z 2. semestrálneho testu
  - Dnes o 14.15, m. M-X.
  - Týka sa to len tých študentov, ktorí nemohli prísť na riadny termín zo závažných dôvodov (napr. pre chorobu).
- Konzultácie
  - Dnes o 15.00, m. M-X.
  - V piatok o 12.00, m. I-16 alebo online.
- Priebežné semestrálne hodnotenie
  - Menej ako 75 bodov zo semestra znamená automaticky (t. j. bez záverečnej skúšky) celkové hodnotenie Fx.
  - Hodnotenie uzatvára každý cvičiaci sám.
  - Treba ho uzavrieť do 8. januára.

Záver

- Zápis na skúšku
  - Požiadavka: splnené priebežné semestrálne hodnotenie.
  - Kedy? Po skončení dnešnej prednášky.
  - Dokedy? Do 8. januára.
- Termíny skúšok
  - Každý utorok od 9. januára.
  - Prvé štyri termíny sú riadne, zvyšné opravné.
  - Prineste si ITIC preukaz.
- Písomná časť skúšky
  - Začína o 9.00 v posluchárni A. Trvá 2 hodiny čistého času.
  - Na jej úspešné absolvovanie je potrebné získať aspoň 75 bodov.
- Ústna časť skúšky
  - V ten istý deň poobede. Účasť je povinná.
  - Teoretická otázka pre potvrdenie hodnotení A a B.
- Konzultácie počas skušobného obdobia
  - Každý pondelok, ktorý je pred skúšobným termínom.
  - Informácie o konzultáciach sú priebežne aktualizované.

Záver

Otázky

- Ak máte otázku, tak zdvihnite ruku.

Koniec prednášky