1-AIN-121 Diskrétna matematika (1)

Zimný semester 2023/24

12. prednáška

Ján Komara

Obsah prednášky

Pravdepodobnosť

Základné pojmy

Téoria pravdepodobnosti

Téoria (počet) pravdepodobnosti je tá časť matematiky, ktorá hľadá zákonitosti, podľa ktorých sa správa náhoda.

Využitie pravdepodobnosti

- Teória hier.
- Medicína.
  - Diagnostikovanie chorôb.
  - Testovanie liekov.
- Testovanie spoľahlivosti výrobkov (hľadanie nepodarkov).
- Predpoveď počasia.
- Ekonomické prognózy.
- Pravdepodobnostná interpretácia kvantovej mechaniky.

Literatúra

- Rastislav Potocký a kolektív.: Zbierka úloh z pravdepodobnosti a matematickej štatistiky. Bratislava: Alfa, 1986.
- Harman, R., Hönschová, E., Somorčík, J.: Zbierka úloh zo základov teórie pravdepodobnosti. Bratislava: PACI, 2009.
- Bachratý, H., Grendár, M., Bachratá, K.: Ako sa počíta pravdepodobnosť. Žilina: Žilinská univerzita, 2010
- Harman, R., Filová, L.: Základy pravdepodobnosti pre študentov informatiky a dátovej vedy. Bratislava: KEC FMFI UK, 2022.

Základné pojmy teórie pravdepodobnosti

- Hromadný dej.
- Náhodný experiment (pokus).
- Náhodná udalosť (jav).
- Relatívna početnosť náhodnej udalosti.
- Pravdepodobnosť náhodnej udalosti.

Základné pojmy teórie pravdepodobnosti

- Hromadný dej.
- Náhodný experiment (pokus).
- Náhodná udalosť (jav).
- Relatívna početnosť náhodnej udalosti.
- Pravdepodobnosť náhodnej udalosti.

Hromadný dej

Hromadný dej je dej, ktorý teoreticky môžeme opakovane ľubovoľnekrát realizovať pri rovnakom komplexe podmienok.

Príklad

- Hádzanie mincou.
- Hádzanie hracou kockou.
- Testovanie spoľahlivosti konkrétneho typu výrobku.
- Diagnostikovanie infekčného ochorenia COVID-19 pomocou
  - rýchleho antigénového testu,
  - RT-PCR testu.
- Testovanie vakcíny proti chorobe COVID-19.

Základné pojmy teórie pravdepodobnosti

- Hromadný dej.
- Náhodný experiment (pokus).
- Náhodná udalosť (jav).
- Relatívna početnosť náhodnej udalosti.
- Pravdepodobnosť náhodnej udalosti.

Náhodný experiment (pokus)

Náhodný experiment je realizácia hromadného deja pri danom komplexe podmienok.

Príklad

- Jeden hod mincou.
- Jeden hod hracou kockou.
- Diagnostikovanie choroby u konkrétneho pacienta.
- Testovanie vakcíny u konkrétneho pacienta.
- Testovanie spoľahlivosti konkrétneho výrobku.

Základné pojmy teórie pravdepodobnosti

- Hromadný dej.
- Náhodný experiment (pokus).
- Náhodná udalosť (jav).
- Relatívna početnosť náhodnej udalosti.
- Pravdepodobnosť náhodnej udalosti.

Náhodná udalosť (jav)

Náhodná udalosť je určitý výrok spätý s uvažovaným hromadným dejom. Elementárny jav je jednotlivý výsledok pokusu.

Príklad

Elementárne javy:

- Pri hode hracou kockou padne šestka.
- Pri hode dvoma hracími kockami naraz je počet bodiek rovný číslu 7.

Zložené javy:

- Pri hode hracou kockou padne číslo väčšie ako 3.
- Pri hode dvoma hracími kockami naraz je počet bodiek väčší ako číslo 7.

Základné pojmy teórie pravdepodobnosti

- Hromadný dej.
- Náhodný experiment (pokus).
- Náhodná udalosť (jav).
- Relatívna početnosť náhodnej udalosti.
- Pravdepodobnosť náhodnej udalosti.

Relatívna početnosť náhodnej udalosti

Relatívna početnosť javu je podiel tých prípadov, kedy udalosť nastala, k počtu všetkých pokusov.

Príklad

- 10-krát za sebou sme hádzali mincou, z toho 4-krát padla hlava. Relatívna početnosť javu „padne hlava“ je tak číslo

$$\frac{4}{10} = \frac{2}{5} = 40\%.$$

- 100-krát za sebou sme hádzali tromi hracími kockami naraz, z toho 6-krát bol počet bodiek rovný číslu 13. Relatívna početnosť javu „počet bodiek je 13“ je tak číslo

$$\frac{6}{100} = \frac{3}{50} = 6\%.$$

Základné pojmy teórie pravdepodobnosti

- Hromadný dej.
- Náhodný experiment (pokus).
- Náhodná udalosť (jav).
- Relatívna početnosť náhodnej udalosti.
- Pravdepodobnosť náhodnej udalosti.

Pravdepodobnosť náhodnej udalosti

Pravdepodobnosť javu je hodnota, okolo ktorej kolíše relatívna početnosť tejto udalosti pri mnohonásobnej realizácií hromadného deja.

Určenie pravdepodobnosti

- Reálnym experimentovaním.
- Simulovaním experimentovania na počítači.
- Myšlienkovým experimentom.
- Výpočtom podľa vzorcov.

Základné pojmy teórie pravdepodobnosti

- Hromadný dej.
- Náhodný experiment (pokus).
- Náhodná udalosť (jav).
- Relatívna početnosť náhodnej udalosti.
- Pravdepodobnosť náhodnej udalosti.

Ilustrované na týchto príkladoch

- Opakovane hádžeme mincou. Výsledkom pokusu je pozorovaný znak na minci.
- Opakovane hádžeme dvoma mincami naraz. Výsledkom pokusu sú pozorované znaky na oboch minciach.
- Opakovane hádžeme hracou kockou. Výsledkom pokusu je číslo (počet bodiek) na vrchnej strane kocky.
- Opakovane hádžeme dvoma hracími kockami naraz. Výsledkom pokusu je súčet čísel (bodiek) na oboch kockách.

Klasická minca

Klasická minca má dve strany:

- Na jednej strane je zobrazená hlava (portrét hlavy štátu).
- Na druhej strane je zobrazený znak (znak štátu).

Príklad

Opakovane hádžeme (klasickou) mincou. Výsledkom pokusu je pozorovaný znak na minci. Určite pravdepodobnosť elementárnych javov hromadného deja.

Riešenie

Hromadný dej má dva elementárne javy:

- Padne hlava. Označenie H.
- Padne znak. Označenie Z.

Pravdepodobnostné úlohy

Hádzanie jednou mincou

Určenie pravdepodobnosti

- Reálnym experimentovaním.
- Simulovaním experimentovania na počítači.
- Myšlienkovým experimentom.

Určenie pravdepodobnosti reálnym experimentovaním

100-krát sme hádzali mincou. Výsledok reálneho experimentovania je zachytený v tabuľke.

Elementárny jav	Početnosť	Relatívna početnosť	Pravdepodobnosť
H	53	$53 : 100 = 0{,}53 = 53\%$	50%
Z	47	$47 : 100 = 0{,}47 = 47\%$	50%

Určenie pravdepodobnosti simulovaním experimentovania na počítači

Miliónkrát sme hádzali mincou. Výsledok počítačového experimentovania je zachytený v tabuľke.

Element. jav	Početnosť	Relatívna početnosť	Pravde-podobnosť
H	498 318	$498\,318 : 10^6 \approx 0{,}498 = 49{,}8\%$	50%
Z	501 682	$501\,682 : 10^6 \approx 0{,}502 = 50{,}2\%$	50%

Pravdepodobnostné úlohy

Určenie pravdepodobnosti myšlienkovým experimentom

Predpokladáme, že minca je pravidelná. To znamená, že ak opakovane hádžeme takouto mincou, tak

- približne v polovici prípadov padne hlava (nastal jav H),
- približne v polovici prípadov padne znak (nastal jav Z).

Odtiaľ dostaneme:

- Relatívna početnosť javu H kolíše okolo hodnoty $1/2$.
- Relatívna početnosť javu Z kolíše okolo hodnoty $1/2$.

Pravdepodobnostné úlohy

Hádzanie jednou mincou

Výsledok myšlienkového experimentovania je zachytený v tabuľke.

Elementárny jav	Pravdepodobnosť
H	$1 : 2 = 0{,}50 = 50\%$
Z	$1 : 2 = 0{,}50 = 50\%$

Je to uniformné rozdelenie pravdepodobnosti:

- elementárne udalosti majú totiž rovnakú pravdepodobnosť.

Príklad

Opakovane hádžeme dvoma mincami naraz. Výsledkom pokusu sú pozorované znaky na oboch minciach. Určite pravdepodobnosť elementárnych javov hromadného deja.

Riešenie

Hromadný dej má tri elementárne javy:

- Padnú dve hlavy. Označenie $\#H = 2$.
- Padne práve jedna hlava. Označenie $\#H = 1$.
- Nepadne žiadna hlava. Označenie $\#H = 0$.

Pravdepodobnostné úlohy

Hádzanie dvoma mincami naraz

Určenie pravdepodobnosti

- Reálnym experimentovaním.
- Simulovaním experimentovania na počítači.
- Myšlienkovým experimentom.

Určenie pravdepodobnosti reálnym experimentovaním

100-krát sme hádzali dvoma mincami naraz. Výsledok reálneho experimentovania je zachytený v tabuľke.

Elementárny jav	Početnosť	Relatívne početnosti	Pravde-podobnosť
$\#H = 2$	24	$24 : 100 = 0{,}24 = 24\%$	25%
$\#H = 1$	48	$48 : 100 = 0{,}48 = 48\%$	50%
$\#H = 0$	28	$28 : 100 = 0{,}28 = 28\%$	25%

Určenie pravdepodobnosti simulovaním experimentovania na počítači

Miliónkrát sme hádzali dvoma mincami naraz. Výsledok počítačového experimentovania je zachytený v tabuľke.

Element. jav	Početnosť	Relatívne početnosti	Pravde-podobnosť
$\#H = 2$	247 908	$247\,908 : 10^6 \approx 0{,}248 = 24{,}8\%$	25%
$\#H = 1$	502 827	$502\,827 : 10^6 \approx 0{,}503 = 50{,}3\%$	50%
$\#H = 0$	249 265	$249\,265 : 10^6 \approx 0{,}249 = 24{,}9\%$	25%

Určenie pravdepodobnosti myšlienkovým experimentom

Mince nevedia, že ich pri vyhodnotení pokusu nerozlišujeme. Ak by sme ich rozlišovali, tak by experiment vypadal takto. Keď hodíme oboma mincami naraz, máme 4 možné výsledky, a to:

$$(H, H) \quad (H, Z) \quad (Z, H) \quad (Z, Z).$$

Prvá hodnota udáva znak na prvej minci, druhá na druhej.

- Výsledok (H, H) odpovedá elementárnej udalosti $\#H = 2$. Jej relatívna početnosť kolíše okolo hodnoty $1/4$.
- Výsledky (H, Z) a (Z, H) odpovedajú elementárnej udalosti $\#H = 1$. Jej relatívna početnosť kolíše okolo hodnoty $2/4 = 1/2$.
- Výsledok (Z, Z) odpovedá elementárnej udalosti $\#H = 0$. Jej relatívna početnosť kolíše okolo hodnoty $1/4$.

Pravdepodobnostné úlohy
Hádzanie dvoma mincami naraz

Výsledok myšlienkového experimentovania je zachytený v tabuľke.

Elementárny jav	Pravdepodobnosť
$\#H = 2$	$1 : 4 = 0{,}25 = 25\%$
$\#H = 1$	$1 : 2 = 0{,}50 = 50\%$
$\#H = 0$	$1 : 4 = 0{,}25 = 25\%$

Je to neuniformné rozdelenie pravdepodobnosti:

- niektoré elementárne udalosti majú totiž rôznu pravdepodobnosť.

Štandardná hracia kocka

Štandardná hracia kocka má šesť očíslovaných stien

⚀ ⚁ ⚂ ⚃ ⚄ ⚅.

Príklad

Opakovane hádžeme (štandardnou) hracou kockou. Výsledkom pokusu je číslo (počet bodiek) na vrchnej strane kocky. Určite pravdepodobnosť elementárnych javov hromadného deja.

Riešenie

Hromadný dej má šesť elementárnych javov:

- Padne 1. Označenie ⚀.
- Padne 2. Označenie ⚁.
- Padne 3. Označenie ⚂.
- Padne 4. Označenie ⚃.
- Padne 5. Označenie ⚄.
- Padne 6. Označenie ⚅.

Pravdepodobnostné úlohy

Určenie pravdepodobnosti

- Reálnym experimentovaním.
- Simulovaním experimentovania na počítači.
- Myšlienkovým experimentom.

Pravdepodobnostné úlohy

Hádzanie jednou hracou kockou

Určenie pravdepodobnosti reálnym experimentovaním

100-krát sme hádzali hracou kockou. Výsledok reálneho experimentovania je zachytený v tabuľke.

Elementárny jav	Početnosť	Relatívna početnosť	Pravde-podobnosť
⚀	16	$16 : 100 = 0{,}16 = 16\%$	$16{,}\overline{6}\%$
⚁	15	$15 : 100 = 0{,}15 = 15\%$	$16{,}\overline{6}\%$
⚂	18	$18 : 100 = 0{,}18 = 18\%$	$16{,}\overline{6}\%$
⚃	18	$18 : 100 = 0{,}18 = 18\%$	$16{,}\overline{6}\%$
⚄	14	$14 : 100 = 0{,}14 = 14\%$	$16{,}\overline{6}\%$
⚅	19	$19 : 100 = 0{,}19 = 19\%$	$16{,}\overline{6}\%$

Pravdepodobnostné úlohy

Hádzanie jednou hracou kockou

Určenie pravdepodobnosti simulovaním experimentovania na počítači

Miliónkrát sme hádzali hracou kockou. Výsledok počítačového experimentovania je zachytený v tabuľke.

Element. jav	Početnosť	Relatívna početnosť	Pravde-podobnosť
⚀	167 311	$167\,311 : 10^6 \approx 0{,}167 = 16{,}7\%$	$16{,}\overline{6}\%$
⚁	165 149	$165\,149 : 10^6 \approx 0{,}165 = 16{,}5\%$	$16{,}\overline{6}\%$
⚂	164 891	$164\,891 : 10^6 \approx 0{,}165 = 16{,}5\%$	$16{,}\overline{6}\%$
⚃	168 002	$168\,002 : 10^6 \approx 0{,}168 = 16{,}8\%$	$16{,}\overline{6}\%$
⚄	166 651	$166\,651 : 10^6 \approx 0{,}167 = 16{,}7\%$	$16{,}\overline{6}\%$
⚅	167 996	$167\,996 : 10^6 \approx 0{,}168 = 16{,}8\%$	$16{,}\overline{6}\%$

Určenie pravdepodobnosti myšlienkovým experimentom

Predpokladáme, že hracia kocka je pravidelná. To znamená, že ak opakovane hádžeme takouto kockou, tak

- približne v jednej šestine prípadov padne číslo $i = 1, \ldots, 6$ (nastal jav $\boxed{\text{i}}$).

Odtiaľ dostaneme:

- Relatívna početnosť javu $\boxed{\text{i}}$, kde $i = 1, \ldots, 6$, kolíše okolo hodnoty $1/6$.

Je to uniformné rozdelenie pravdepodobnosti:

- elementárne udalosti majú totiž rovnakú pravdepodobnosť.

Pravdepodobnostné úlohy

Hádzanie jednou hracou kockou

Výsledok myšlienkového experimentovania je zachytený v tabuľke.

Elementárny jav	Pravdepodobnosť
⚀	$1 : 6 = 0,1\overline{6} = 16{,}\overline{6}\%$
⚁	$1 : 6 = 0,1\overline{6} = 16{,}\overline{6}\%$
⚂	$1 : 6 = 0,1\overline{6} = 16{,}\overline{6}\%$
⚃	$1 : 6 = 0,1\overline{6} = 16{,}\overline{6}\%$
⚄	$1 : 6 = 0,1\overline{6} = 16{,}\overline{6}\%$
⚅	$1 : 6 = 0,1\overline{6} = 16{,}\overline{6}\%$

Príklad
Opakovane hádžeme dvoma hracími kockami naraz. Výsledkom pokusu je súčet čísel (počet bodov) na oboch kockách. Určite pravdepodobnosť elementárnych javov hromadného deja.

Riešenie
Hromadný dej má 11 elementárnych javov:

- Súčet čísel na oboch kockách je rovný číslu $s = 2, \ldots, 12$. Označenie $\Sigma = s$.

Pravdepodobnostné úlohy

Hádzanie dvoma hracími kockami naraz

Určenie pravdepodobnosti

- Reálnym experimentovaním.
- Simulovaním experimentovania na počítači.
- Myšlienkovým experimentom.

Určenie pravdepodobnosti reálnym experimentovaním

100-krát sme hádzali dvoma hracími kockami naraz. Výsledok reálneho experimentovania je zachytený v tabuľke.

Elementárny jav	Početnosť	Relatívna početnosť	Pravdepodobnosť
$\Sigma = 2$	2	$2 : 100 = 0{,}02 = 2\%$	$2{,}\overline{7}\%$
$\Sigma = 3$	7	$7 : 100 = 0{,}07 = 7\%$	$5{,}\overline{5}\%$
$\Sigma = 4$	8	$8 : 100 = 0{,}08 = 8\%$	$8{,}\overline{3}\%$
$\Sigma = 5$	12	$12 : 100 = 0{,}12 = 12\%$	$11{,}\overline{1}\%$

Elementárny jav	Početnosť	Relatívna početnosť	Pravdepodobnosť
$\Sigma = 6$	15	$15 : 100 = 0{,}15 = 15\%$	$13{,}\overline{8}\%$
$\Sigma = 7$	19	$19 : 100 = 0{,}19 = 19\%$	$16{,}\overline{6}\%$
$\Sigma = 8$	14	$14 : 100 = 0{,}14 = 14\%$	$13{,}\overline{8}\%$
$\Sigma = 9$	10	$10 : 100 = 0{,}10 = 10\%$	$11{,}\overline{1}\%$
$\Sigma = 10$	6	$6 : 100 = 0{,}06 = 6\%$	$8{,}\overline{3}\%$
$\Sigma = 11$	4	$4 : 100 = 0{,}04 = 4\%$	$5{,}\overline{5}\%$
$\Sigma = 12$	3	$3 : 100 = 0{,}03 = 3\%$	$2{,}\overline{7}\%$

Pravdepodobnostné úlohy

Hádzanie dvoma hracími kockami naraz

Určenie pravdepodobnosti simulovaním experimentovania na počítači

Miliónkrát sme hádzali dvoma hracími kockami naraz. Výsledok počítačového experimentovania je zachytený v tabuľke.

Element. jav	Početnosť	Relatívna početnosť	Pravde-podobnosť
$\Sigma = 2$	28 201	$28\,201 : 10^6 \approx 0{,}028 = 2{,}8\%$	$2{,}\overline{7}\%$
$\Sigma = 3$	54 339	$54\,339 : 10^6 \approx 0{,}054 = 5{,}4\%$	$5{,}\overline{5}\%$
$\Sigma = 4$	82 001	$82\,001 : 10^6 \approx 0{,}082 = 8{,}2\%$	$8{,}\overline{3}\%$
$\Sigma = 5$	120 071	$120\,071 : 10^6 \approx 0{,}120 = 12{,}0\%$	$11{,}\overline{1}\%$

Element. jav	Početnosť	Relatívna početnosť	Pravde-podobnosť
$\Sigma = 6$	130 726	$130\,726 : 10^6 \approx 0{,}130 = 13{,}0\%$	$13{,}\overline{8}\%$
$\Sigma = 7$	170 102	$170\,102 : 10^6 \approx 0{,}170 = 17{,}0\%$	$16{,}\overline{6}\%$
$\Sigma = 8$	140 528	$140\,528 : 10^6 \approx 0{,}140 = 14{,}0\%$	$13{,}\overline{8}\%$
$\Sigma = 9$	111 097	$111\,097 : 10^6 \approx 0{,}111 = 11{,}1\%$	$11{,}\overline{1}\%$
$\Sigma = 10$	82 032	$82\,032 : 10^6 \approx 0{,}082 = 8{,}2\%$	$8{,}\overline{3}\%$
$\Sigma = 11$	58 598	$58\,598 : 10^6 \approx 0{,}059 = 5{,}9\%$	$5{,}\overline{5}\%$
$\Sigma = 12$	22 305	$22\,305 : 10^6 \approx 0{,}022 = 2{,}2\%$	$2{,}\overline{7}\%$

Určenie pravdepodobnosti myšlienkovým experimentom

Hracie kocky nevedia, že ich pri vyhodnotení pokusu nerozlišujeme. Ak by sme ich rozlišovali, tak by experiment vypadal takto. Keď hodíme oboma kockami, máme 36 možných výsledkov, a to:

(⚀, ⚀) (⚀, ⚁) (⚀, ⚂) (⚀, ⚃) (⚀, ⚄) (⚀, ⚅)
(⚁, ⚀) (⚁, ⚁) (⚁, ⚂) (⚁, ⚃) (⚁, ⚄) (⚁, ⚅)
(⚂, ⚀) (⚂, ⚁) (⚂, ⚂) (⚂, ⚃) (⚂, ⚄) (⚂, ⚅)
(⚃, ⚀) (⚃, ⚁) (⚃, ⚂) (⚃, ⚃) (⚃, ⚄) (⚃, ⚅)
(⚄, ⚀) (⚄, ⚁) (⚄, ⚂) (⚄, ⚃) (⚄, ⚄) (⚄, ⚅)
(⚅, ⚀) (⚅, ⚁) (⚅, ⚂) (⚅, ⚃) (⚅, ⚄) (⚅, ⚅).

Prvá hodnota udáva číslo na prvej kocke, druhá na druhej.

- Výsledok (⚀, ⚀) odpovedá elementárnej udalosti $\Sigma = 2$. Jej relatívna početnosť kolíše okolo hodnoty $1/36$.
- Výsledky (⚀, ⚁) a (⚁, ⚀) odpovedajú elementárnej udalosti $\Sigma = 3$. Jej relatívna početnosť kolíše okolo hodnoty $2/36 = 1/18$.
- Výsledky (⚀, ⚂), (⚁, ⚁) a (⚂, ⚀) odpovedajú elementárnej udalosti $\Sigma = 4$. Jej relatívna početnosť kolíše okolo hodnoty $3/36 = 1/12$.
- Výsledky (⚀, ⚃), (⚁, ⚂), (⚂, ⚁) a (⚃, ⚀) odpovedajú elementárnej udalosti $\Sigma = 5$. Jej relatívna početnosť kolíše okolo hodnoty $4/36 = 1/9$.
- Výsledky (⚀, ⚄), (⚁, ⚃), (⚂, ⚂), (⚃, ⚁) a (⚄, ⚀) odpovedajú elementárnej udalosti $\Sigma = 6$. Jej relatívna početnosť kolíše okolo hodnoty $5/36$.
- Výsledky (⚀, ⚅), (⚁, ⚄), (⚂, ⚃), (⚃, ⚂), (⚄, ⚁) a (⚅, ⚀) odpovedajú elementárnej udalosti $\Sigma = 7$. Jej relatívna početnosť kolíše okolo hodnoty $6/36 = 1/6$.

- Výsledky $(\epsdice{2},\epsdice{6})$, $(\epsdice{3},\epsdice{5})$, $(\epsdice{4},\epsdice{4})$, $(\epsdice{5},\epsdice{3})$ a $(\epsdice{6},\epsdice{2})$ odpovedajú elementárnej udalosti $\Sigma = 8$. Jej relatívna početnosť kolíše okolo hodnoty $5/36$.
- Výsledky $(\epsdice{3},\epsdice{6})$, $(\epsdice{4},\epsdice{5})$, $(\epsdice{5},\epsdice{4})$ a $(\epsdice{6},\epsdice{3})$ odpovedajú elementárnej udalosti $\Sigma = 9$. Jej relatívna početnosť kolíše okolo hodnoty $4/36 = 1/9$.
- Výsledky $(\epsdice{4},\epsdice{6})$, $(\epsdice{5},\epsdice{5})$ a $(\epsdice{6},\epsdice{4})$ odpovedajú elementárnej udalosti $\Sigma = 10$. Jej relatívna početnosť kolíše okolo hodnoty $3/36 = 1/12$.
- Výsledky $(\epsdice{5},\epsdice{6})$ a $(\epsdice{6},\epsdice{5})$ odpovedajú elementárnej udalosti $\Sigma = 11$. Jej relatívna početnosť kolíše okolo hodnoty $2/36 = 1/18$.
- Výsledok $(\epsdice{6},\epsdice{6})$ odpovedá elementárnej udalosti $\Sigma = 12$. Jej relatívna početnosť kolíše okolo hodnoty $1/36$.

Výsledok myšlienkového experimentovania je zachytený v tabuľke. Je to neuniformné rozdelenie pravdepodobnosti:

- elementárne udalosti nemajú totiž rovnakú pravdepodobnosť.

Elementárny jav	Pravdepodobnosť
$\Sigma = 2$	$1 : 36 = 0{,}02\overline{7} = 2{,}\overline{7}\%$
$\Sigma = 3$	$2 : 36 = 1 : 18 = 0{,}0\overline{5} = 5{,}\overline{5}\%$
$\Sigma = 4$	$3 : 36 = 1 : 12 = 0{,}08\overline{3} = 8{,}\overline{3}\%$
$\Sigma = 5$	$4 : 36 = 1 : 9 = 0{,}\overline{1} = 11{,}\overline{1}\%$
$\Sigma = 6$	$5 : 36 = 0{,}13\overline{8} = 13{,}\overline{8}\%$
$\Sigma = 7$	$6 : 36 = 1 : 6 = 0{,}1\overline{6} = 16{,}\overline{6}\%$
$\Sigma = 8$	$5 : 36 = 0{,}13\overline{8} = 13{,}\overline{8}\%$
$\Sigma = 9$	$4 : 36 = 1 : 9 = 0{,}\overline{1} = 11{,}\overline{1}\%$
$\Sigma = 10$	$3 : 36 = 1 : 12 = 0{,}08\overline{3} = 8{,}\overline{3}\%$
$\Sigma = 11$	$2 : 36 = 1 : 18 = 0{,}0\overline{5} = 5{,}\overline{5}\%$
$\Sigma = 12$	$1 : 36 = 0{,}02\overline{7} = 2{,}\overline{7}\%$

Elementárny jav	Pravdepodobnosť
$\Sigma = 2$	$1 : 36 = 0{,}02\overline{7} = 2{,}\overline{7}\%$
$\Sigma = 3$	$2 : 36 = 1 : 18 = 0{,}0\overline{5} = 5{,}\overline{5}\%$
$\Sigma = 4$	$3 : 36 = 1 : 12 = 0{,}08\overline{3} = 8{,}\overline{3}\%$
$\Sigma = 5$	$4 : 36 = 1 : 9 = 0{,}\overline{1} = 11{,}\overline{1}\%$
$\Sigma = 6$	$5 : 36 = 0{,}13\overline{8} = 13{,}\overline{8}\%$
$\Sigma = 7$	$6 : 36 = 1 : 6 = 0{,}1\overline{6} = 16{,}\overline{6}\%$
$\Sigma = 8$	$5 : 36 = 0{,}13\overline{8} = 13{,}\overline{8}\%$
$\Sigma = 9$	$4 : 36 = 1 : 9 = 0{,}\overline{1} = 11{,}\overline{1}\%$
$\Sigma = 10$	$3 : 36 = 1 : 12 = 0{,}08\overline{3} = 8{,}\overline{3}\%$
$\Sigma = 11$	$2 : 36 = 1 : 18 = 0{,}0\overline{5} = 5{,}\overline{5}\%$
$\Sigma = 12$	$1 : 36 = 0{,}02\overline{7} = 2{,}\overline{7}\%$

Určenie pravdepodobnosti výpočtom podľa vzorca

Opakovane hádžeme dvoma hracími kockami naraz. Výsledkom pokusu je súčet čísel (počet bodov) na oboch kockách. Určite pravdepodobnosť, že

- súčet je väčší ako 7,
- súčet je aspoň 7,
- súčet je párne číslo.

Riešenie

Určenie pravdepodobnosti výpočtom podľa vzorca

Opakovane hádžeme dvoma hracími kockami naraz. Výsledkom pokusu je súčet čísel (počet bodov) na oboch kockách. Určite pravdepodobnosť, že

- súčet je väčší ako 7,
- súčet je aspoň 7,
- súčet je párne číslo.

Riešenie

Priestor náhodných udalostí

Nech Ω je neprázdna konečná množina.

- Prvky množiny Ω nazývame elementárne udalosti (javy).
- Podmnožiny množiny Ω nazývame náhodné udalosti (javy).
- Konvencia: elementárny jav $\omega \in \Omega$ stotožňujeme s jednoprvkovou udalosťou $\{\omega\} \subseteq \Omega$.

Základne operácie na náhodných udalostiach

- Istý jav Ω.
- Nemožný jav $\emptyset$.
- Zjednotenie javov $A \cup B$.
- Prienik javov $A \cap B$.
- Doplnok javu (opačná udalosť) $\overline{A}$.

Konečný pravdepodobnostný priestor

Nech Ω je konečná množina elementárnych javov a nech P je reálna funkcia na Ω taká, že

$$\forall \omega \in \Omega \, P(\omega) \geq 0 \tag{1}$$

$$\sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) = 1. \tag{2}$$

Pravdepodobnosť $P(A)$ náhodnej udalosti $A \subseteq \Omega$ definujeme ako

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\omega). \tag{3}$$

Usporiadaná dvojica (Ω, P) sa nazýva konečný pravdepodobnostný priestor a funkcia P pravdepodobnostná miera na tomto priestore.

Konečný pravdepodobnostný priestor

Nech Ω je konečná množina elementárnych javov a nech P je reálna funkcia na Ω taká, že

$$\forall \omega \in \Omega \, P(\omega) \geq 0 \tag{1}$$

$$\sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) = 1. \tag{2}$$

Pravdepodobnosť $P(A)$ náhodnej udalosti $A \subseteq \Omega$ definujeme ako

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\omega). \tag{3}$$

Usporiadaná dvojica (Ω, P) sa nazýva konečný pravdepodobnostný priestor a funkcia P pravdepodobnostná miera na tomto priestore.

Klasický pravdepodobnostný priestor

Nech (Ω, P) je konečný pravdepodobnostný priestor s uniformným rozdelením pravdepodobnosti:

$$\forall \omega \in \Omega \, P(\omega) = \frac{1}{|\Omega|}.$$

Elementárne udalosti majú rovnakú pravdepodobnosť.

Veta

Pre každý jav A klasického pravdepodobnostného priestoru (Ω, P) platí vzťah

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

Konečný pravdepodobnostný priestor

Nech Ω je konečná množina elementárnych javov a nech P je reálna funkcia na Ω taká, že

$$\forall \omega \in \Omega \, P(\omega) \geq 0 \tag{1}$$

$$\sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) = 1. \tag{2}$$

Pravdepodobnosť $P(A)$ náhodnej udalosti $A \subseteq \Omega$ definujeme ako

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\omega). \tag{3}$$

Usporiadaná dvojica (Ω, P) sa nazýva konečný pravdepodobnostný priestor a funkcia P pravdepodobnostná miera na tomto priestore.

Veta

Nech (Ω, P) je konečný pravdepodobnostný priestor. Potom pre každú náhodnú udalosť $A \subseteq \Omega$ a $B \subseteq \Omega$ platí:

$$P(\emptyset) = 0 \land P(\Omega) = 1 \tag{4}$$

$$A \subseteq B \rightarrow P(A) \leq P(B) \tag{5}$$

$$0 \leq P(A) \leq 1 \tag{6}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \tag{7}$$

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A). \tag{8}$$

Dôsledok

Ak A a B sú disjunktné (navzájom výlučné) javy, potom

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B). \tag{9}$$

Pravdepodobnosť

Vlastnosti pravdepodobnosti

$$\forall \omega \in \Omega \; P(\omega) \geq 0 \tag{1}$$

$$\sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) = 1 \tag{2}$$

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\omega) \tag{3}$$

$$P(\emptyset) = 0 \land P(\Omega) = 1 \tag{4}$$

$$A \subseteq B \rightarrow P(A) \leq P(B) \tag{5}$$

$$0 \leq P(A) \leq 1 \tag{6}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \tag{7}$$

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) \tag{8}$$

$$A \cap B = \emptyset \rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) \tag{9}$$

Pravdepodobnosť

Vlastnosti pravdepodobnosti

$$\forall \omega \in \Omega \, P(\omega) \geq 0 \tag{1}$$

$$\sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) = 1 \tag{2}$$

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\omega) \tag{3}$$

$$P(\emptyset) = 0 \wedge P(\Omega) = 1 \tag{4}$$

$$A \subseteq B \rightarrow P(A) \leq P(B) \tag{5}$$

$$0 \leq P(A) \leq 1 \tag{6}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \tag{7}$$

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) \tag{8}$$

$$A \cap B = \emptyset \rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) \tag{9}$$

Pravdepodobnosť

Vlastnosti pravdepodobnosti

$$\forall \omega \in \Omega \; P(\omega) \geq 0 \tag{1}$$

$$\sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) = 1 \tag{2}$$

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\omega) \tag{3}$$

$$P(\emptyset) = 0 \wedge P(\Omega) = 1 \tag{4}$$

$$A \subseteq B \rightarrow P(A) \leq P(B) \tag{5}$$

$$0 \leq P(A) \leq 1 \tag{6}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \tag{7}$$

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) \tag{8}$$

$$A \cap B = \emptyset \rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) \tag{9}$$

Pravdepodobnosť

Vlastnosti pravdepodobnosti

$$\forall \omega \in \Omega \, P(\omega) \geq 0 \tag{1}$$

$$\sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) = 1 \tag{2}$$

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\omega) \tag{3}$$

$$P(\emptyset) = 0 \wedge P(\Omega) = 1 \tag{4}$$

$$A \subseteq B \rightarrow P(A) \leq P(B) \tag{5}$$

$$0 \leq P(A) \leq 1 \tag{6}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \tag{7}$$

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) \tag{8}$$

$$A \cap B = \emptyset \rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) \tag{9}$$

Pravdepodobnosť

Vlastnosti pravdepodobnosti

$$\forall \omega \in \Omega \, P(\omega) \geq 0 \tag{1}$$

$$\sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) = 1 \tag{2}$$

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\omega) \tag{3}$$

$$P(\emptyset) = 0 \wedge P(\Omega) = 1 \tag{4}$$

$$A \subseteq B \rightarrow P(A) \leq P(B) \tag{5}$$

$$0 \leq P(A) \leq 1 \tag{6}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \tag{7}$$

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) \tag{8}$$

$$A \cap B = \emptyset \rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) \tag{9}$$

Záver

Organizácia predmetu

- Konzultácie
  - Dnes o 14.30, m. online.
- 5. domáca úloha
  - Riešenie odovzdať do MOODLE do dnešného večera.
  - Riešenie v editore, nie rukopis.
- 2. semestrálny test
  - Opravovanie zatiaľ neskončilo.
  - O jeho skončeni budete informovaní.
  - Až potom môžete reklamovať hodnotenie u svojho cvičiaceho.
  - Náhradný termín:
    - Dnes o 14.15, m. M-X (Mihálik).
    - Týka sa to len tých študentov, ktorí nemohli prísť na riadny termín zo závažných dôvodov (napr. pre chorobu). Toto treba ovšem včas oznámiť.

Záver

Organizácia predmetu

- Priebežné semestrálne hodnotenie
  - Menej ako 75 bodov zo semestra znamená automaticky (t. j. bez záverečnej skúšky) celkové hodnotenie FX.
- Skúšobné obdobie
  - Termíny skúšok
    - Každý utorok od 9. januára.
    - Písomná časť skúšky: o 9.00 v poslucharni A.
    - Ústna časť skúšky: v ten istý deň poobede.
- Zápis na skúšku
  - Požiadavka: splnené priebežné semestrálne hodnotenie.
  - Kedy? Niekedy po skončení poslednej prednášky.

Otázky

- Ak máte otázku, tak zdvihnite ruku.

Koniec prednášky