1-AIN-121 Diskrétna matematika (1)

Zimný semester 2023/24

11. prednáška

Ján Komara

Obsah prednášky

Neformálna definícia

Zobrazením f množiny A do množiny B rozumieme predpis, ktorý každému prvku x z A priradí jednoznačne nejaký prvok y z B.

- Prvok y sa nazýva hodnota zobrazenia f v prvku x a zapisuje sa $f(x)$.
- To, že f je zobrazenie množiny A do množiny B zapisujeme stručne takto $f : A \to B$.
- Množina A sa nazýva obor zobrazenia f a množina B koobor zobrazenia f.

Štvorec čísla ako funkcia

Nech $A = \{1, 2, 3\}$ a $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Predpisom

$$\forall x \in A \forall y \in B \left(f(x) = y \leftrightarrow y = x^2\right)$$

je definovaná funkcia

$$f : A \to B.$$

Alternatívny zápis (explicitná definícia)

$$\forall x \in A\, f(x) = x^2.$$

V poslednom prípade sa často používa Churchova λ-notácia

$$\lambda x.x^2$$

pre označenie zobrazenia f.

Označenie

- $\mathbb{R}$ je množina reálnych čísel.
- $\mathbb{R}_{0+}$ je množina nezáporných reálnych čísel:

$$\mathbb{R}_{0+} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}.$$

Odmocnina ako reálna funkcia

Zápis $\sqrt{x}$ označuje druhú odmocninu reálneho čísla x.

Označenie

- $\mathbb{R}$ je množina reálnych čísel.
- $\mathbb{R}_{0+}$ je množina nezáporných reálnych čísel:

$$\mathbb{R}_{0+} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}.$$

Odmocnina ako reálna funkcia

Zápis $\sqrt{x}$ označuje druhú odmocninu reálneho čísla x.

Odmocnina ako reálna funkcia

Zápis $\sqrt{x}$ označuje druhú odmocninu reálneho čísla x. Je to funkcia

$$\lambda x.\sqrt{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

definovaná predpisom

$$\forall x {\in} \mathbb{R} \forall y {\in} \mathbb{R} \left(\sqrt{x} = y \leftrightarrow y^2 = x\right).$$

Existenčná podmienka definície:

$$\forall x {\in} \mathbb{R} \exists y {\in} \mathbb{R}\, y^2 = x.$$

Podmienka jednoznačnosti definície:

$$\forall x {\in} \mathbb{R} \forall y_1 {\in} \mathbb{R} \forall y_2 {\in} \mathbb{R} \left(y_1^2 = x \wedge y_2^2 = x \to y_1 = y_2\right).$$

Označenie

- $\mathbb{R}$ je množina reálnych čísel.
- $\mathbb{R}_{0+}$ je množina nezáporných reálnych čísel:

$$\mathbb{R}_{0+} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}.$$

Odmocnina ako reálna funkcia

Zápis $\sqrt{x}$ označuje druhú odmocninu reálneho čísla x.

Odmocnina ako reálna funkcia

Zápis $\sqrt{x}$ označuje druhú odmocninu reálneho čísla x. Je to funkcia

$$\lambda x.\sqrt{x} : \mathbb{R}_{0+} \to \mathbb{R}$$

definovaná predpisom

$$\forall x{\in}\mathbb{R}_{0+} \forall y{\in}\mathbb{R} \left(\sqrt{x} = y \leftrightarrow y^2 = x\right).$$

Existenčná podmienka definície:

$$\forall x{\in}\mathbb{R}_{0+} \exists y{\in}\mathbb{R}\, y^2 = x.$$

Podmienka jednoznačnosti definície:

$$\forall x{\in}\mathbb{R}_{0+} \forall y_1{\in}\mathbb{R} \forall y_2{\in}\mathbb{R} \left(y_1^2 = x \wedge y_2^2 = x \to y_1 = y_2\right).$$

Označenie

- $\mathbb{R}$ je množina reálnych čísel.
- $\mathbb{R}_{0+}$ je množina nezáporných reálnych čísel:

$$\mathbb{R}_{0+} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}.$$

Odmocnina ako reálna funkcia

Zápis $\sqrt{x}$ označuje druhú odmocninu reálneho čísla x.

Odmocnina ako reálna funkcia

Zápis $\sqrt{x}$ označuje druhú odmocninu reálneho čísla x. Je to funkcia

$$\lambda x.\sqrt{x} : \mathbb{R}_{0+} \to \mathbb{R}_{0+}$$

definovaná predpisom

$$\forall x \in \mathbb{R}_{0+} \forall y \in \mathbb{R}_{0+} \left(\sqrt{x} = y \leftrightarrow y^2 = x\right).$$

Existenčná podmienka definície:

$$\forall x \in \mathbb{R}_{0+} \exists y \in \mathbb{R}_{0+}\ y^2 = x.$$

Podmienka jednoznačnosti definície:

$$\forall x \in \mathbb{R}_{0+} \forall y_1 \in \mathbb{R}_{0+} \forall y_2 \in \mathbb{R}_{0+} \left(y_1^2 = x \wedge y_2^2 = x \to y_1 = y_2\right).$$

Definícia

- Binárna relácia $f \subseteq A \times B$ sa nazýva zobrazenie množiny A do množiny B, ak f je všade definovaná a jednoznačná relácia:

$$\forall x{\in}A \exists y{\in}B \, (x, y) \in f$$
$$\forall x{\in}A \forall y_1{\in}B \forall y_2{\in}B \big((x, y_1) \in f \wedge (x, y_2) \in f \to y_1 = y_2\big).$$

- Skutočnosť, že f je zobrazenie množiny A do množiny B zapisujeme symbolicky takto $f : A \to B$.
- Množina A sa nazýva obor zobrazenia f a množina B koobor zobrazenia f.
- Ak $A = B$, tak hovoríme o zobrazení na množine A.
- Ak koobor zobrazenia je číselná množina, tak zobrazenie sa sa často nazýva funkcia.

Poznámka

Zobrazením sa niekedy rozumie usporiadaná trojica $f = (A, G, B)$, kde G je jednoznačná a všade definovaná relácia z množiny A do množiny B. Binárna relácia G sa vtedy nazýva graf zobrazenia f.

Notácia

- Ak $(x, y) \in f$ pre $f : A \to B$, potom píšeme $f(x)$ namiesto y. Prvok y sa nazýva hodnota zobrazenia f pre prvok x. Čiže

$$\forall x{\in}A \forall y{\in}B \big(f(x) = y \leftrightarrow (x, y) \in f\big).$$

- Ak $f : A_1 \times \cdots \times A_n \to B$, potom aplikáciu $f\big((a_1, \ldots, a_n)\big)$ zapisujeme stručne takto $f(a_1, \ldots, a_n)$.
- Ak $f : A^n \to A$, tak hovoríme o n-árnej operácii na A.

Zobrazenia

Základné pojmy

Obory zobrazenia

- Definičný obor zobrazenia

$$\mathrm{D}(f) = \{x \in A \mid \exists y{\in}B\, f(x) = y\} = A.$$

- Obor hodnôt zobrazenia

$$\mathrm{H}(f) = \{y \in B \mid \exists x{\in}A\, f(x) = y\}.$$

Rovnosť zobrazení

Pre zobrazenia množiny A do množiny B má axióma extenzionalita tento tvar. Ak $f : A \to B$ a $g : A \to B$, potom

$$f = g \leftrightarrow \forall x{\in}A\, f(x) = g(x).$$

Veta

Počet zobrazení m-prvkovej množiny do n-prvkovej množiny je rovný číslu

$$n^m = \overbrace{n \cdot n \cdot \cdots \cdot n}^{m\text{-činiteľov}}.$$

Dôkaz

Hľadaný počet je rovný počtu variácií s opakovaním m prvkov z n druhov.

Kontextuálna definícia zobrazenia

Nech $\varphi[x, y]$ je výroková forma v uvedených premenných z definičným oborom obsahujúcim $A \times B$. Nech ďalej pre výrokovú formu $\varphi[x, y]$ platí existenčná podmienka

$$\forall x{\in}A \exists y{\in}B\, \varphi[x, y]$$

a podmienka jednoznačnosti

$$\forall x{\in}A \forall y_1{\in}B \forall y_2{\in}B \big(\varphi[x, y_1] \wedge \varphi[x, y_2] \to y_1 = y_2\big).$$

Potom existuje práve jediné zobrazenie $f : A \to B$ také, že

$$\forall x{\in}A \forall y{\in}B \big(f(x) = y \leftrightarrow \varphi[x, y]\big).$$

Dôkaz

Stačí položiť

$$f = \left\{(x, y) \in A \times B \;\middle|\; \varphi[x, y]\right\}.$$

Všade definovateľnosť a jednoznačnosť tejto relácie plynie z platnosti existenčnej podmienky a podmienky jednoznačnosti výrokovej formy $\varphi[x, y]$.

Notácia

Konjunkciu existenčnej podmienky a podmienky jednoznačnosti budeme skrátene zapisovať takto:

$$\forall x{\in}A\,\exists_1 y{\in}B\; \varphi[x, y].$$

Implicitná definícia zobrazenia

Kontextuálna definícia

$$\forall x{\in}A\forall y{\in}B\big(f(x) = y \leftrightarrow \varphi[x, y]\big).$$

sa často zapisuje v tomto ekvivalentnom tvare:

$$\forall x{\in}A\,\varphi[x, f(x)].$$

Vtedy hovoríme o implicitnej definícii zobrazenia $f : A \to B$.

Explicitná definícia zobrazenia

Kontextuálna definícia

$$\forall x{\in}A\,\forall y{\in}B\big(f(x) = y \leftrightarrow y = \tau[x]\big)$$

je ekvivalentná tejto rovnosti:

$$\forall x{\in}A\, f(x) = \tau[x].$$

Tu hovoríme o explicitnej definícii zobrazenia $f : A \to B$. V takom prípade sa často používa Churchova λ-notácia $\lambda x.\tau$ pre označenie zobrazenia f.

Odmocnina

Zápis $\sqrt{x}$ označuje druhú odmocninu nezáporného reálneho čísla x. Je to zobrazenie (funkcia) na množine nezáporných reálnych čísel

$$\mathbb{R}_{0+} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}.$$

Funkcia

$$\lambda x.\sqrt{x} : \mathbb{R}_{0+} \to \mathbb{R}_{0+}$$

je definovaná predpisom

$$\forall x{\in}\mathbb{R}_{0+} \forall y{\in}\mathbb{R}_{0+} \left(\sqrt{x} = y \leftrightarrow y^2 = x\right).$$

Korektnosť definície

- Podmienka jednoznačnosti plynie z tejto vlastnosti:

$$\forall y_1{\in}\mathbb{R}_{0+}\forall y_2{\in}\mathbb{R}_{0+}(y_1 < y_2 \to y_1^2 < y_2^2).$$

- Existenčná podmienka plynie z tejto vlastnosti:
  každá zhora ohraničená neprázdna uzavretá podmnožina množiny reálnych čísel má najväčší prvok (maximum).

Nech x je ľubovolné nezáporné reálne číslo. Potom predpis

$$y = \max\{y \in \mathbb{R}_{0+} \mid y^2 \leq x\}$$

je korektnou definíciou prirodzeného čísla y (prečo?). Odtiaľ

$$y^2 = x.$$

Dolná celá časť reálneho čísla

Zápis $\lfloor x \rfloor$ označuje dolnú celú časť reálneho čísla x. Je to funkcia

$$\lambda x. \lfloor x \rfloor : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$$

definovaná predpisom

$$\forall x {\in} \mathbb{R} \forall n {\in} \mathbb{Z} \big(\lfloor x \rfloor = n \leftrightarrow n \leq x < n + 1 \big).$$

Korektnosť definície

- Podmienka jednoznačnosti plynie z tejto vlastnosti celých čísel:

$$m < n \to m < m+1 \leq n < n+1.$$

- Existenčná podmienka je dôsledok tejto vlastnosti celých čísel:

  každá zhora ohraničená neprázdna podmnožina množiny celých čísel má najväčší prvok (maximum).

  Skutočne, nech x je ľubovolné reálne číslo. Potom predpis

$$n = \max\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\}$$

  je korektnou definíciou celého čísla n (prečo?). Odtiaľ

$$n \leq x < n+1.$$

Horná celá časť reálneho čísla

Zápis $\lceil x \rceil$ označuje hornú celú časť reálneho čísla x. Je to funkcia

$$\lambda x.\lceil x \rceil : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$$

definovaná predpisom

$$\forall x{\in}\mathbb{R}\forall n{\in}\mathbb{Z}\big(\lceil x \rceil = n \leftrightarrow n - 1 < x \leq n\big).$$

Korektnosť definície

- Podmienka jednoznačnosti plynie z tejto vlastnosti celých čísel:

$$m < n \to m - 1 < m \leq n - 1 < n.$$

- Existenčná podmienka je dôsledok tejto vlastnosti celých čísel:

  každá zdola ohraničená neprázdna podmnožina množiny celých čísel má najväčší prvok (minimum).

  Skutočne, nech x je ľubovolné reálne číslo. Potom predpis

$$n = \min\{n \in \mathbb{Z} \mid x \leq n\}$$

  je korektnou definíciou celého čísla n (prečo?). Odtiaľ

$$n - 1 \leq x < n.$$

Celočíselná odmocnina

Zápis $\lfloor\sqrt{x}\rfloor$ označuje celočíselnú (druhú) odmocninu prirodzeného čísla x. Je to funkcia na množine prirodzených čísel N. Funkcia

$$\lambda x.\left\lfloor\sqrt{x}\right\rfloor : \mathrm{N} \to \mathrm{N}$$

je definovaná predpisom:

$$\forall x{\in}\mathrm{N}\forall y{\in}\mathrm{N}\left(\left\lfloor\sqrt{x}\right\rfloor = y \leftrightarrow y^2 \leq x < (y+1)^2\right).$$

Korektnosť definície

- Podmienka jednoznačnosti plynie z tejto vlastnosti:

$$\forall y_1 \in \mathrm{N} \forall y_2 \in \mathrm{N} \left(y_1 < y_2 \rightarrow y_1^2 < (y_1 + 1)^2 \leq y_2^2 < (y_2 + 1)^2 \right).$$

- Existenčná podmienka plynie z tejto vlastnosti:
  každá zhora ohraničená neprázdna podmnožina množiny prirodzených čísel má najväčší prvok (maximum).

  Skutočne, nech x je ľubovolné prirodzené číslo. Potom predpis

$$y = \max\{y \in \mathrm{N} \mid y^2 \leq x\}$$

je korektnou definíciou prirodzeného čísla y (prečo?). Odtiaľ

$$y^2 \leq x < (y+1)^2.$$

Definícia

Nech $f : A \to B$, $X \subseteq A$ a $Y \subseteq B$.

- Množinu $f(X)$ všetkých tých prvkov $y \in B$, pre ktoré existuje $x \in X$ také, že $f(x) = y$, nazývame obrazom množiny X v zobrazení f:

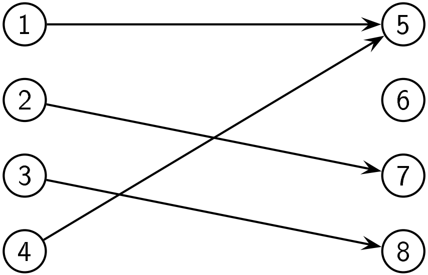
$$f(X) = \big\{ y \in B \;\big|\; \exists x{\in}A \big(x \in X \wedge f(x) = y \big) \big\}.$$

- Množinu $f^{-1}(Y)$ všetkých tých prvkov $x \in A$ takých, že $f(x) \in Y$, nazývame vzorom množiny Y v zobrazení f:

$$\begin{aligned} f^{-1}(Y) &= \{ x \in A \mid \exists y{\in}B (y \in Y \wedge f(x) = y) \} \\ &= \{ x \in A \mid f(x) \in Y \}. \end{aligned}$$

Príklad

Uvažujme zobrazenie f popísané diagramom:



Obrazy niektorých množín v zobrazeni f:

$$\begin{aligned} f(\emptyset) &= \emptyset \\ f(\{1\}) &= \{5\} \\ f(\{1,2\}) &= \{5,7\} \\ f(\{1,2,3\}) &= \{5,7,8\} \\ f(\{1,2,3,4\}) &= \{5,7,8\}. \end{aligned}$$

Vzory niektorých množín v zobrazeni f:

$$\begin{aligned} f^{-1}(\emptyset) &= \emptyset \\ f^{-1}(\{5\}) &= \{1,4\} \\ f^{-1}(\{5,6\}) &= \{1,4\} \\ f^{-1}(\{5,6,7\}) &= \{1,2,4\} \\ f^{-1}(\{5,6,7,8\}) &= \{1,2,3,4\}. \end{aligned}$$

Zobrazenia

Obraz a vzor množiny v zobrazení

Veta

Nech $f : A \to B$, $X_1 \subseteq A$ a $X_2 \subseteq A$. Potom platí:

$$X_1 \subseteq X_2 \to f(X_1) \subseteq f(X_2) \tag{1}$$

$$f(X_1 \cup X_2) = f(X_1) \cup f(X_2) \tag{2}$$

$$f(X_1 \cap X_2) \subseteq f(X_1) \cap f(X_2) \tag{3}$$

$$f(X_1 \setminus X_2) \supseteq f(X_1) \setminus f(X_2). \tag{4}$$

Dôkaz tvrdenia (2)

Našim cieľom je dokázať

$$\forall y \in B \big(y \in f(X_1 \cup X_2) \leftrightarrow y \in f(X_1) \cup f(X_2)\big).$$

Nech $y \in B$ je ľubovolný prvok. Postupnými úpravami dostaneme

$$y \in f(X_1 \cup X_2) \Leftrightarrow \{\text{z definície obrazu množiny}\}$$

$$\exists x \in A\big(x \in X_1 \cup X_2 \wedge f(x) = y\big) \Leftrightarrow \{\text{z definície zjednotenia}\}$$

$$\exists x \in A\big((x \in X_1 \vee x \in X_2) \wedge f(x) = y\big) \Leftrightarrow$$

$$\exists x \in A\Big(\big(x \in X_1 \wedge f(x) = y\big) \vee \big(x \in X_2 \wedge f(x) = y\big)\Big) \Leftrightarrow$$

$$\exists x \in A\big(x \in X_1 \wedge f(x) = y\big) \vee \exists x \in A\big(x \in X_2 \wedge f(x) = y\big) \Leftrightarrow$$

$$\{\text{z definície obrazu množiny}\}$$

$$y \in f(X_1) \vee y \in f(X_2) \Leftrightarrow \{\text{z definície zjednotenia}\}$$

$$y \in f(X_1) \cup f(X_2).$$

Zobrazenia

Obraz a vzor množiny v zobrazení

Veta

Nech $f : A \to B$, $Y_1 \subseteq B$ a $Y_2 \subseteq B$. Potom platí:

$$Y_1 \subseteq Y_2 \to f^{-1}(Y_1) \subseteq f^{-1}(Y_2) \tag{1}$$

$$f^{-1}(Y_1 \cup Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2) \tag{2}$$

$$f^{-1}(Y_1 \cap Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cap f^{-1}(Y_2) \tag{3}$$

$$f^{-1}(Y_1 \setminus Y_2) = f^{-1}(Y_1) \setminus f^{-1}(Y_2). \tag{4}$$

Dôkaz tvrdenia (2)

Našim cieľom je dokázať

$$\forall x{\in}A\big(x \in f^{-1}(Y_1 \cup Y_2) \leftrightarrow x \in f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2)\big).$$

Nech $x \in A$ je ľubovolný prvok. Postupnými úpravami dostaneme

$$x \in f^{-1}(Y_1 \cup Y_2) \Leftrightarrow \{\text{z definície vzoru množiny}\}$$

$$f(x) \in Y_1 \cup Y_2 \Leftrightarrow \{\text{z definície zjednotenia}\}$$

$$f(x) \in Y_1 \vee f(x) \in Y_2 \Leftrightarrow \{\text{z definície vzoru množiny}\}$$

$$x \in f^{-1}(Y_1) \vee x \in f^{-1}(Y_2) \Leftrightarrow \{\text{z definície zjednotenia}\}$$

$$x \in f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2).$$

Definícia

Zložením (kompozícia) zobrazení $f : A \to B$ a $g : B \to C$ rozumieme zobrazenie $f \circ g : A \to C$ definované predpisom

$$\forall x \in A \, (f \circ g)(x) = g\big(f(x)\big).$$

Poznámka

Platí

$$f \circ g = \left\{(x, z) \in A \times C \;\middle|\; \exists y{\in}B \big(f(x) = y \wedge g(y) = z\big)\right\}.$$

Zloženie zobrazení je tak špeciálnym prípadom zloženia binárnych relácií.

Notácia

Vonkajšie zátvorky vo výrazoch typu $g\big(f(x)\big)$ budeme často vynechávať a píšeme stručne $g\,f(x)$. Predošlá definícia sa dá zapísať takto:

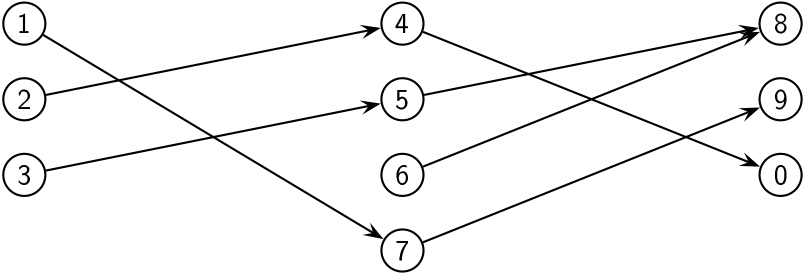
$$\forall x{\in}A\, (f \circ g)(x) = g\,f(x).$$

Zobrazenia

Zložené zobrazenie

Príklad

Na nasledujúcom obrázku sú nakreslené grafy dvoch zobrazení $f : \{1, 2, 3\} \to \{4, 5, 6, 7\}$ a $g : \{4, 5, 6, 7\} \to \{8, 9, 0\}$:



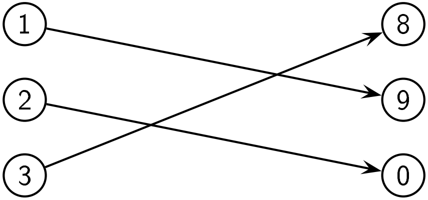
Zobrazenia

Zložené zobrazenie

Ich zložením vznikne zobrazenie

$$f \circ g : \{1, 2, 3\} \to \{8, 9, 0\},$$

ktorého grafická reprezentácia (diagram) vypadá takto:



Veta
Nech $f : A \to B$*,* $g : B \to C$ *a* $h : C \to D$*. Potom platí*

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h).$$

Poznámka
Skladanie zobrazení je asociatívna operácia. Z toho dôvodu budeme zátvorky vo výrazoch typu $f \circ g \circ h$ vynechávať.

Dôkaz

Našim cieľom je dokázať

$$\forall x{\in}A\,\big((f\circ g)\circ h\big)(x)=\big(f\circ(g\circ h)\big)(x).$$

Nech $x\in A$ je ľubovolný prvok. Postupnými úpravami dostaneme

$$\begin{aligned}\big((f\circ g)\circ h\big)(x)&=h\big((f\circ g)(x)\big)=h\Big(g\big(f(x)\big)\Big)=\\&=(g\circ h)\big(f(x)\big)=\big(f\circ(g\circ h)\big)(x).\end{aligned}$$

Definícia

Zobrazenie $f : A \to B$ sa nazýva injektívne, ak

$$\forall x_1 \in A \forall x_2 \in A \big(x_1 \neq x_2 \to f(x_1) \neq f(x_2)\big).$$

Túto podmienku je možné zapísať v tomto ekvivalentnom tvare:

$$\forall x_1 \in A \forall x_2 \in A \big(f(x_1) = f(x_2) \to x_1 = x_2\big).$$

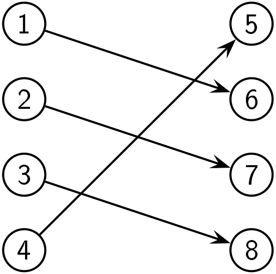
Injektívne zobrazenie sa nazýva tiež prosté zobrazenie.

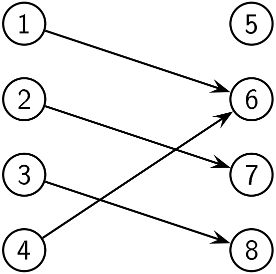
Poznámka

Všimnime si, že v grafovej reprezentácií sa požiadavka injektívnosti dá vysloviť nasledujúcim spôsobom. Aby (konečné) zobrazenie $f : A \to B$ bolo prosté, tak do každého vrcholu z kooboru B musí viesť nanajvýš jedna hrana z vrcholov definičného oboru A.

Príklad

Zobrazenie f popísané prvým diagramom je injektívne zobrazenie:





Zobrazenie g popísané druhým diagramom nie je injektívne zobrazenie, pretože $g(1) = 6 = g(4)$.

Príklad

Zobrazenie

$$\lambda x.x^2 : \mathrm{N} \to \mathrm{N}$$

je injektívne. Je to dôsledok tejto vlastnosti prirodzených čísel:

$$\forall x_1 {\in} \mathrm{N} \forall x_2 {\in} \mathrm{N} \left(x_1 < x_2 \to x_1^2 < x_2^2 \right).$$

Príklad

Zobrazenie

$$\lambda x. \left\lfloor \sqrt{x} \right\rfloor : \mathrm{N} \to \mathrm{N}$$

nie je injektívne. Platí totiž

$$\left\lfloor \sqrt{4} \right\rfloor = 2 = \left\lfloor \sqrt{5} \right\rfloor.$$

Príklad

Druhá odmocnina nezáporného reálneho čísla

$$\lambda x.\sqrt{x} : \mathbb{R}_{0+} \to \mathbb{R}_{0+}$$

je injektívne zobrazenie. Je to dôsledok tejto vlastnosti nezáporných reálnych čísel

$$\forall y_1{\in}\mathbb{R}_{0+} \forall y_2{\in}\mathbb{R}_{0+} \left(y_1^2 < y_2^2 \to y_1 < y_2\right).$$

Odtiaľ totiž okamžite dostaneme

$$\forall x_1{\in}\mathbb{R}_{0+} \forall x_2{\in}\mathbb{R}_{0+} \left(x_1 < x_2 \to \sqrt{x_1} < \sqrt{x_2}\right).$$

Veta

Počet injektívnych zobrazení m-prvkovej množiny do n-prvkovej množiny je rovný číslu

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdots \cdot (n-m+1).$$

Dôkaz

Hľadaný počet je rovný počtu variácií bez opakovania m prvkov z n druhov.

Veta

Nech $f : A \to B$ a $g : B \to C$ sú injektívne zobrazenia. Potom aj ich kompozícia $f \circ g : A \to C$ je injektívne zobrazenie.

Dôkaz

Našim cieľom je dokázať

$$\forall x_1 {\in} A \forall x_2 {\in} A \big(x_1 \neq x_2 \to (f \circ g)(x_1) \neq (f \circ g)(x_2) \big).$$

Nech $x_1, x_2 \in A$ sú ľubovolné prvky také, že $x_1 \neq x_2$. Z injektívnosti zobrazenia f plynie, že $f(x_1) \neq f(x_2)$. Z injektívnosti zobrazenia g dostaneme, že $g\,f(x_1) \neq g\,f(x_2)$. Odtiaľ

$$(f \circ g)(x_1) = g\,f(x_1) \neq g\,f(x_2) = (f \circ g)(x_2).$$

Veta

Nech $f : A \to B$ a $g : B \to C$. Ak ich kompozícia $f \circ g : A \to C$ je injektívne zobrazenie, potom aj f je injektívne zobrazenie.

Dôkaz

Našim cieľom je dokázať

$$\forall x_1 {\in} A \forall x_2 {\in} A \big(x_1 \neq x_2 \to f(x_1) \neq f(x_2)\big).$$

Nech $x_1, x_2 \in A$ sú ľubovolné prvky také, že $x_1 \neq x_2$. Z injektívnosti zobrazenia $f \circ g$ plynie, že

$$g\,f(x_1) = (f \circ g)(x_1) \neq (f \circ g)(x_2) = g\,f(x_2).$$

Odtiaľ okamžite dostaneme požadovanú nerovnosť $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Definícia

Zobrazenie $f : A \to B$ sa nazýva surjektívne zobrazenie, ak $\mathrm{H}(f) = B$, t. j. ak

$$\forall y{\in}B \exists x{\in}A \, f(x) = y.$$

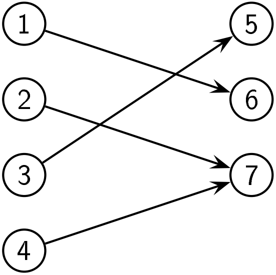
V takom prípade hovoríme, že f je zobrazenie množiny A *na* množinu B.

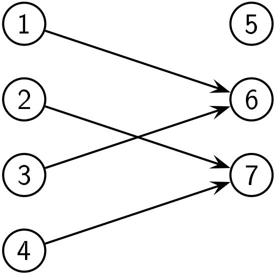
Poznámka

Všimnime si, že v grafovej reprezentácií sa požiadavka surjektívnosti dá vysloviť nasledujúcim spôsobom. Aby (konečné) zobrazenie $f : A \to B$ bolo surjektívne, tak do každého vrcholu z kooboru B musí viesť aspoň jedna hrana z vrcholov definičného oboru A.

Zobrazenia
Surjektívne zobrazenia

Príklad
Zobrazenie f popísané prvým diagramom je surjektívne zobrazenie:





Zobrazenie g popísané druhým diagramom nie je surjektívne, pretože $5 \notin \mathrm{H}(g)$, t. j. $\neg\exists x{\in}\{1,2,3,4\}\, g(x) = 5$.

Príklad
Zobrazenie

$$\lambda x.\left\lfloor \sqrt{x} \right\rfloor : \mathrm{N} \to \mathrm{N}$$

je surjektívne, pretože

$$\forall y{\in}\mathrm{N} \left\lfloor \sqrt{y^2} \right\rfloor = y.$$

Príklad
Zobrazenie

$$\lambda x.x^2 : \mathrm{N} \to \mathrm{N}$$

nie je surjektívne, pretože $2 \notin \mathrm{H}(\lambda x.x^2)$, t. j.

$$\neg\exists x{\in}\mathrm{N}\, x^2 = 2.$$

Príklad

Druhá odmocnina nezáporného reálneho čísla

$$\lambda x.\sqrt{x} : \mathbb{R}_{0+} \to \mathbb{R}_{0+}$$

je surjektívne zobrazenie. Je to priamočiary dôsledok tohoto jednoduchého tvrdenia

$$\forall y{\in}\mathbb{R}_{0+} \sqrt{y^2} = y.$$

Veta

Počet surjektívnych zobrazení m-prvkovej množiny na n-prvkovú množinu je rovný číslu

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}(n-k)^m.$$

Dôkaz

Nech $\mathcal{F}$ je množina všetkých zobrazení m-prvkovej množiny A do n-prvkovej množiny $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$. Označme symbolom $\mathcal{F}_i$ množinu tých prvkov f z $\mathcal{F}$, ktoré majú vlastnosť $b_i \notin \mathrm{H}(f)$. Všetky množiny $\mathcal{F}_{i_1} \cap \cdots \cap \mathcal{F}_{i_k}$ majú rovnako veľa prvkov pre ľubovolný výber prirodzených čísel k a $1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n$:

$$|\mathcal{F}_{i_1} \cap \cdots \cap \mathcal{F}_{i_k}| = (n-k)^m.$$

Podľa princípu zapojenia a vypojenia hľadaný počet je rovný číslu

$$\left|\bigcap_{i=1}^{n} \overline{\mathcal{F}_i}\right| = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \left|\bigcap_{i=1}^{k} \mathcal{F}_i\right| = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^m.$$

Veta

Nech $f : A \to B$ a $g : B \to C$ sú surjektívne zobrazenia. Potom aj ich kompozícia $f \circ g : A \to C$ je surjektívne zobrazenie.

Dôkaz

Našim cieľom je dokázať

$$\forall z{\in}C \exists x{\in}A \, (f \circ g)(x) = z.$$

Nech $z \in C$ je ľubovolný prvok. Zo surjektívnosti g plynie, že existuje $y \in B$ také, že $g(y) = z$. Zo surjektívnosti f plynie, že existuje $x \in A$ také, že $f(x) = y$. Odtiaľ

$$(f \circ g)(x) = g\, f(x) = g(y) = z.$$

Zobrazenie $f \circ g$ je tak surjekcia.

Veta

Nech $f : A \to B$ a $g : B \to C$. Ak ich kompozícia $f \circ g : A \to C$ je surjektívne zobrazenie, potom aj g je surjektívne zobrazenie.

Dôkaz

Našim cieľom je dokázať

$$\forall z \in C \, \exists y \in B \; z = g(y).$$

Nech $z \in C$ je ľubovolný prvok. Zo surjektívnosti $f \circ g$ plynie, že existuje $x \in A$ také, že $(f \circ g)(x) = z$. Odtiaľ pre $y = f(x) \in B$ dostaneme

$$g(y) = g\, f(x) = (f \circ g)(x) = z.$$

Zobrazenie g je teda surjekcia.

Definícia

Zobrazenie $f : A \to B$ sa nazýva bijektívne, ak je súčasne injektívne a surjektívne:

$$\forall y{\in}B \exists_1 x{\in}A \, f(x) = y.$$

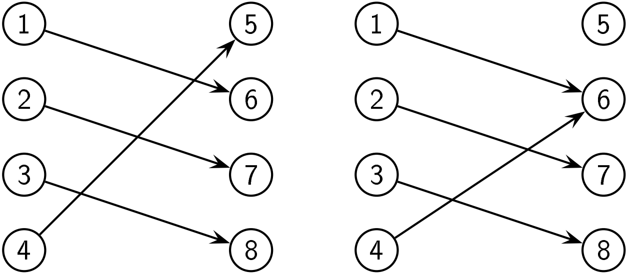
Bijektívne zobrazenia na množine sa nazývajú tiež permutácie tejto množiny.

Poznámka

Všimnime si, že v grafovej reprezentácií požiadavka bijektívnosti sa dá vysloviť nasledujúcim spôsobom. Aby (konečné) zobrazenie $f : A \to B$ bolo bijektívne, tak do každého vrcholu z kooboru B musí viesť práve jedna hrana z vrcholov definičného oboru A.

Príklad

Zobrazenie f popísané prvým diagramom je bijektívne zobrazenie:



Zobrazenie g popísané druhým diagramom nie je bijektívne zobrazenie, pretože nie je ani injektívne $g(1) = 6 = g(4)$, ani surjektívne $5 \notin \mathrm{H}(g)$.

Príklad

Už vieme, že druhá odmocnina nezáporného reálneho čísla $\lambda x.\sqrt{x} : \mathbb{R}_{0+} \to \mathbb{R}_{0+}$:

$$\forall x{\in}\mathbb{R}_{0+} \forall y{\in}\mathbb{R}_{0+} \left(\sqrt{x} = y \leftrightarrow y^2 = x\right)$$

je nielen injektívne ale aj surjektívne zobrazenie. Je to teda bijektívne zobrazenie.

Príklad

Cantorova párovacia funkcia $J : \mathrm{N}^2 \to \mathrm{N}$, ktorá je definovaná predpisom

$$J(x, y) = \frac{(x+y)(x+y+1)}{2} + x,$$

je bijektívne zobrazenie.

Cantorova párovacia funkcia

$J(x,y)$	0	1	2	3	4	5	6	$\cdots$
0	0	1	3	6	10	15	21	$\cdots$
1	2	4	7	11	16	22	29	$\cdots$
2	5	8	12	17	23	30	38	$\cdots$
3	9	13	18	24	31	39	48	$\cdots$
4	14	19	25	32	40	49	59	$\cdots$
5	20	26	33	41	50	60	71	$\cdots$
6	27	34	42	51	61	72	84	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

$$J(x,y) = \sum_{i=1}^{x+y} i + x = \frac{(x+y)(x+y+1)}{2} + x$$

Veta

Počet bijektívnych zobrazení m-prvkovej množiny do n-prvkovej množiny je rovný číslu

$$\begin{cases} n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n! & \textit{ak } m = n, \\ 0 & \textit{ak } m \neq n. \end{cases}$$

Dôkaz

Ak $m < n$, tak počet takýchto bijektívnych zobrazení je triválne rovný číslu 0. Ak $m \geq n$, tak hľadaný počet je rovný počtu variácií bez opakovania m prvkov z n druhov:

$$n.(n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdots \cdot (n-m+1).$$

Ten je rovný číslu 0 pre $m > n$ a číslu $n!$ pre $m = n$.

Veta

Nech $f : A \to B$ *a* $g : B \to C$ *sú bijektívne zobrazenia. Potom aj ich kompozícia* $f \circ g : A \to C$ *je bijektívne zobrazenie.*

Dôkaz

Je to priamočiary dôsledok obdobných viet pre injektívne a surjektívne zobrazenia.

Zobrazenia

Bijektívne zobrazenia

Veta

Nech $f : A \to B$ *a* $g : B \to C$. *Ak ich kompozícia* $f \circ g : A \to C$ *je bijektívne zobrazenie, potom* f *je injektívne a* g *je surjektívne zobrazenie.*

Dôkaz

Je to priamočiary dôsledok obdobných viet pre injektívne a surjektívne zobrazenia.

Záver

Organizácia predmetu

- Konzultácie:
  - Dnes o 14.30, online.
  - V piatok o 12.00, m. I-16 alebo online.
- 2. semestrálny test:
  - V stredu 29. novembra o 18.10 v m. A a B.
  - Téma: logika a množiny (bez dôkazov množinových identít, nie zobrazenia).
  - Hodnotenie: 40 bodov.
  - Test trvá 90 minút čistého času.
  - Rozdelenie podľa abecedy:
    - Poslucháreň A: A – O.
    - Poslucháreň B: P – Z.
  - Nezabudnite si priniesť svoj ISIC preukaz.
- 5. domáca úloha
  - Odovzdať do 4. decembra.

Záver

- Skúšobné obdobie
  - Termíny skúšok: každý utorok od 9. januára.

Otázky

- Ak máte otázku, tak zdvihnite ruku.

Koniec prednášky