1-AIN-121 Diskrétna matematika (1)

Zimný semester 2023/24

10. prednáška

Ján Komara

Obsah prednášky

Zopakovanie

Binárne relácie

- Základné pojmy
- Obraz a vzor množiny v relácii
- Skladanie relácií
- Inverzná relácia
- Všade definované relácie
- Jednoznačné relácie

Záver

Zopakovanie

Byť prvkom množiny

- Zápis $x \in A$ znamená „objekt x je prvkom množiny A".
- Negáciu tvrdenia $x \in A$ zapisujeme skrátene $x \notin A$.

Axióma extenzionality

$$A = B \leftrightarrow \forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B).$$

Vzťah inklúzie

$$A \subseteq B \leftrightarrow \forall x(x \in A \to x \in B)$$

$$A \subset B \leftrightarrow A \subseteq B \wedge A \neq B.$$

Zopakovanie

Poznámka

- Pri dôkaze rovnosti dvoch množín je možné použiť vzťah inklúzie, pretože platí nasledujúca očividná ekvivalencia:

$$A = B \leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A.$$

- Ak A a B sú podmnožiny nejakej základnej množiny U, potom

$$A = B \leftrightarrow \forall x{\in}U(x \in A \leftrightarrow x \in B)$$

$$A \subseteq B \leftrightarrow \forall x{\in}U(x \in A \rightarrow x \in B).$$

Zopakovanie

Základné množinové operácie

- Prázdna množína

$$\emptyset = \{x \mid x \neq x\}.$$

- Zjednotenie množín

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}.$$

- Prienik množín

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}.$$

Zopakovanie

Základné množinové operácie

- Potenčná množina

$$\mathcal{P}(A) = \{B \mid B \subseteq A\}.$$

- Karteziánsky súčin množín

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \wedge y \in B\}.$$

- Karteziánska druhá mocnina množiny

$$A^2 = A \times A = \{(x, y) \mid x \in A \wedge x \in A\}.$$

Zopakovanie

Literatúra (množiny)

- Jajcayová, T., Komara, J.: vlastné elektronické texty zverejňované na webovej stránke predmetu.
- Grimaldi, R. P.: Discrete and Combinatorial Mathematics. Boston : Pearson / Addison-Wesley, 2004.
- Bukovský, L.: Množiny a všeličo okolo nich. Košice: Univerzita Pavla Jozefa Šafárika, 2005 (2. vydanie).

Doplňujúca literatúra (množiny)

- Olejár, D., Škoviera, M.: Diskrétna matematika 1: Úvod do teórie množín, teórie booleovských funkcií a matematickej logiky. Bratislava: Univerzita Komenského, 1992.
- Olejár, D., Škoviera, M.: Úvod do diskrétnych matematických štruktúr. 2007. Elektronický učebný text, 2007, Prístupný len z UK: http://www.dcs.fmph.uniba.sk/texty/dsmain.pdf

Príklad

Vzťahy (predikáty) na množine prirodzených čísel N reprezentujeme ako podmnožiny karteziánskeho súčinu $\mathrm{N} \times \mathrm{N} = \mathrm{N}^2$:

$$R_1 = \{(x, y) \in \mathrm{N}^2 \mid x = y\}$$

$$R_2 = \{(x, y) \in \mathrm{N}^2 \mid x \leq y\}$$

$$R_3 = \{(x, y) \in \mathrm{N}^2 \mid x < y\}$$

$$R_4 = \{(x, y) \in \mathrm{N}^2 \mid x \mid y\}.$$

Príklad

Zobrazenie f množiny A do množiny, symbolicky $f : A \to B$, je jednoznačne určené svojim grafom:

$$G_f = \{(x, y) \in A \times B \mid f(x) = y\}.$$

Príklad

Orientovaný graf G je usporiadaná dvojica $G = (V, E)$, kde:

- V je neprázdna konečná množina vrcholov grafu,
- E je množina orientovaných hrán grafu:

$$E \subseteq V \times V = V^2.$$

Binárne relácie

Základné pojmy

Definícia

- Množinu R nazveme binárnou reláciou z množiny A do množiny B, ak $R \subseteq A \times B$.
- Adjektív „binárna“ v spojení „binárna relácia“ budeme často vynechávať.
- Vravíme tiež, že R je reláciou medzi prvkami množín A a B.
- Množina A sa nazýva obor relácie R a množina B jej koobor.
- Ak $A = B$, tak hovoríme o relácii na množine A.

Príklady relácií

- Prázdna množina $\emptyset$ je binárnou reláciou medzi prvkami množín A a B.
- Karteziánsky súčin $A \times B$ je binárnou reláciou medzi prvkami množín A a B.
- Symbolom I_A označujeme identickú reláciu na A:

$$\mathrm{I}_A = \{(x, y) \in A \times A \mid x = y\} = \{(x, y) \in A^2 \mid x = y\}.$$

Nazýva sa tiež relácia rovnosti na množine A. Iné časté pomenovanie je diagonála množiny A.

Definičný obor relácie

Množinu $\mathrm{D}(R)$ všetkých tých prvkov $x \in A$, pre ktoré existuje $y \in B$ také, že $(x, y) \in R$, nazývame definičný obor relácie R:

$$\mathrm{D}(R) = \{x \in A \mid \exists y{\in}B\, (x, y) \in R\}.$$

Obor hodnôt relácie

Množinu $\mathrm{H}(R)$ všetkých tých prvkov $y \in B$, pre ktoré existuje $x \in A$ také, že $(x, y) \in R$, nazývame obor hodnôt relácie R:

$$\mathrm{H}(R) = \{y \in B \mid \exists x{\in}A\, (x, y) \in R\}.$$

Základné vzťahy medzi reláciami

Ak R a S sú binárne relácie z A do B, potom

$$R = S \leftrightarrow \forall x{\in}A \forall y{\in}B \big((x,y) \in R \leftrightarrow (x,y) \in S\big)$$

$$R \subseteq S \leftrightarrow \forall x{\in}A \forall y{\in}B \big((x,y) \in R \rightarrow (x,y) \in S\big).$$

Príklad

Množina usporiadaných dvojíc

$$R = \{(1,1),(1,4),(2,2),(3,1)\}$$

je binárnou reláciou z množiny $A = \{1,2,3\}$ do množiny $B = \{1,2,3,4\}$.

Obory relácie

- Definičný obor relácie

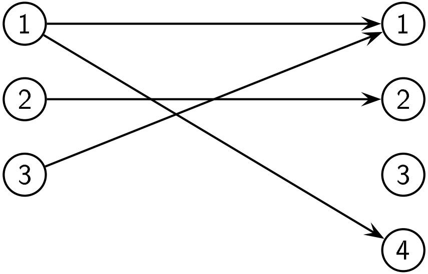
$$\mathrm{D}(R) = \{1,2,3\}.$$

- Obor hodnôt relácie

$$\mathrm{H}(R) = \{1,2,4\}.$$

Grafická reprezentácia relácie

Nasledujúci obrázok graficky znázorňuje binárnu reláciu R:

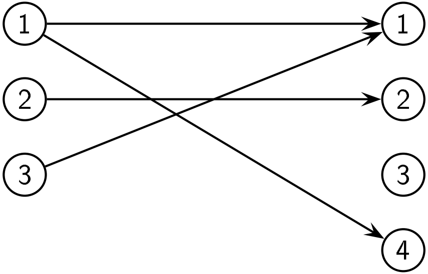


Vysvetlenie diagramu:

- Uzly grafu odpovedajú jednotlivým prvkom množiny A a B.
- Orientované hrany (šipky) odpovedajú jednotlivým usporiadaným dvojiciam relácie R.

Grafická reprezentácia relácie

Nasledujúci obrázok graficky znázorňuje binárnu reláciu R:



Maticová reprezentácia relácie

Nasledujúca boolovská matica rozmerov 3×4

$$\mathcal{M}(R) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

jednoznačne popisuje binárnu reláciu R. Platí totiž

$$(\mathcal{M}(R))_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{ak } (i,j) \in R, \\ 0 & \text{ak } (i,j) \notin R. \end{cases}$$

Tu $(\mathcal{M}(R))_{i,j}$ predstavuje prvok matice v i-tom riadku a v j-tom stĺpci.

Veta
Nech $|A| = m$ a $|B| = n$. Počet binárných relácií z A do B je rovný číslu

$$2^{mn}.$$

Dôkaz
Hľadaný počet je rovný číslu

$$|\mathcal{P}(A \times B)| = 2^{|A \times B|} = 2^{|A||B|} = 2^{mn}.$$

Iný dôkaz

Boolovská matica binárnej relácie z A do B pozostáva z mn prvkov. Každý takýto prvok môžeme vytvoriť 2 spôsobmi. Hľadaný počet je tak dôsledkom násobiaceho princípu:

$$\overbrace{2 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot 2}^{mn\text{-krát}} = 2^{mn}.$$

Veta

Nech $|A| = m$ a $|B| = n$. Počet binárných relácií R z A do B takých, že $\mathrm{H}(R) = B$, je rovný číslu

$$(2^m - 1)^n.$$

Dôkaz

Boolovská matica binárnej relácie z A do B, pre ktorú $\mathrm{H}(R) = B$, pozostáva z takých stĺpcov, ktoré obsahujú aspoň jednu jednotku. Každý takýto stĺpec môžeme vytvoriť $2^m - 1$ spôsobmi. Hľadaný počet je tak dôsledkom princípu súčinu:

$$\overbrace{(2^m - 1) \cdot (2^m - 1) \cdot \cdots \cdot (2^m - 1)}^{n\text{-krát}} = (2^m - 1)^n.$$

Definícia

Nech R je binárna relácia z A do B, $X \subseteq A$ a $Y \subseteq B$.

- Množinu $R[X]$ všetkých tých prvkov $y \in B$, pre ktoré existuje $x \in X$ také, že $(x, y) \in R$, nazývame obrazom množiny X v relácii R:

$$R[X] = \{y \in B \mid \exists x{\in}A\big(x \in X \wedge (x, y) \in R\big)\}.$$

- Množinu $R^{-1}[Y]$ všetkých tých prvkov $x \in A$ takých, že existuje $y \in Y$ také, že $(x, y) \in R$, nazývame vzorom množiny množiny Y v relácii R:

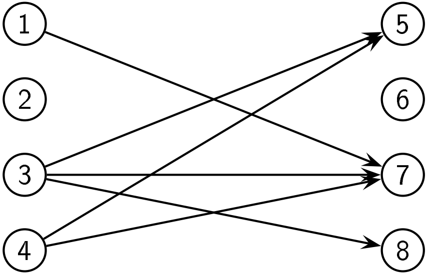
$$R^{-1}[Y] = \{x \in A \mid \exists y{\in}B\big(y \in Y \wedge (x, y) \in R\big)\}.$$

Binárne relácie

Obraz a vzor množiny v relácii

Príklad

Uvažujme binárnu reláciu R popísané grafom:



Obrazy niektorých množín v relácii R:

$$\begin{aligned} R[\emptyset] &= \emptyset \\ R[\{1\}] &= \{7\} \\ R[\{1,2\}] &= \{7\} \\ R[\{1,2,3\}] &= \{5,7,8\} \\ R[\{1,2,3,4\}] &= \{5,7,8\}. \end{aligned}$$

Vzory niektorých množín v relácii R:

$$\begin{aligned} R^{-1}[\emptyset] &= \emptyset \\ R^{-1}[\{5\}] &= \{3,4\} \\ R^{-1}[\{5,6\}] &= \{3,4\} \\ R^{-1}[\{5,6,7\}] &= \{1,3,4\} \\ R^{-1}[\{5,6,7,8\}] &= \{1,3,4\}. \end{aligned}$$

Veta

Nech $R \subseteq A \times B$, $X_1 \subseteq A$ a $X_2 \subseteq A$. Potom platí:

$$X_1 \subseteq X_2 \to R[X_1] \subseteq R[X_2] \tag{1}$$

$$R[X_1 \cup X_2] = R[X_1] \cup R[X_2] \tag{2}$$

$$R[X_1 \cap X_2] \subseteq R[X_1] \cap R[X_2] \tag{3}$$

$$R[X_1 \setminus X_2] \supseteq R[X_1] \setminus R[X_2]. \tag{4}$$

Dôkaz tvrdenia (2)

Našim cieľom je dokázať

$$\forall y{\in}B(y \in R[X_1 \cup X_2] \leftrightarrow y \in R[X_1] \cup R[X_2]).$$

Nech $y \in B$ je ľubovolný prvok. Postupnými úpravami dostaneme

$$y \in R[X_1 \cup X_2] \Leftrightarrow \{\text{z definície obrazu množiny}\}$$

$$\exists x{\in}A\big(x \in X_1 \cup X_2 \wedge (x, y) \in R\big) \Leftrightarrow \{\text{z definície zjednotenia}\}$$

$$\exists x{\in}A\big((x \in X_1 \vee x \in X_2) \wedge (x, y) \in R\big) \Leftrightarrow$$

$$\exists x{\in}A\Big(\big(x \in X_1 \wedge (x, y) \in R\big) \vee \big(x \in X_2 \wedge (x, y) \in R\big)\Big) \Leftrightarrow$$

$$\exists x{\in}A\big(x \in X_1 \wedge (x, y) \in R\big) \vee \exists x{\in}A\big(x \in X_2 \wedge (x, y) \in R\big) \Leftrightarrow$$

$$\{\text{z definície obrazu množiny}\}$$

$$y \in R[X_1] \vee y \in R[X_2] \Leftrightarrow \{\text{z definície zjednotenia}\}$$

$$y \in R[X_1] \cup R[X_2]\,.$$

Definícia

Nech R je binárna relácia z A do B a nech S je binárna relácia z B do C. Zložením relácií R a S rozumieme binárnu reláciu $R \circ S$ z A do C definovanú predpisom

$$R \circ S = \big\{(x,z) \in A \times C \mid \exists y{\in}B\big((x,y) \in R \wedge (y,z) \in S\big)\big\}.$$

Príklad

Nech R je binárna relácia z množiny $A = \{1, 2, 3\}$ do množiny $B = \{4, 5, 6, 7\}$:

$$R = \{(1, 4), (1, 7), (2, 5), (3, 4)\}$$

z množiny $A = \{1, 2, 3\}$ do množiny $B = \{4, 5, 6, 7\}$. Nech ďalej S je binárna relácia z množiny B do množiny $C = \{8, 9, 0\}$:

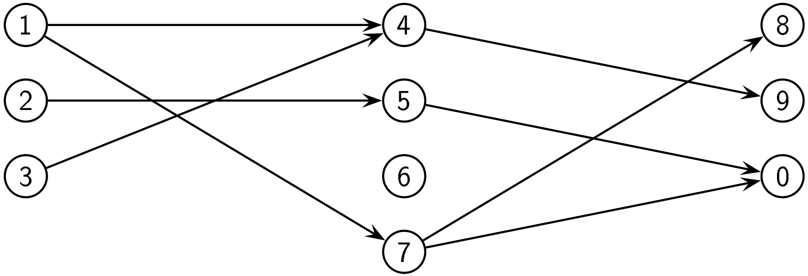
$$S = \{(4, 9), (5, 0), (7, 8), (7, 0)\}$$

Potom $R \circ S$ je binárna relácia z množiny A do množiny C:

$$R \circ S = \{(1, 8), (1, 9), (1, 0), (2, 0), (3, 9)\}.$$

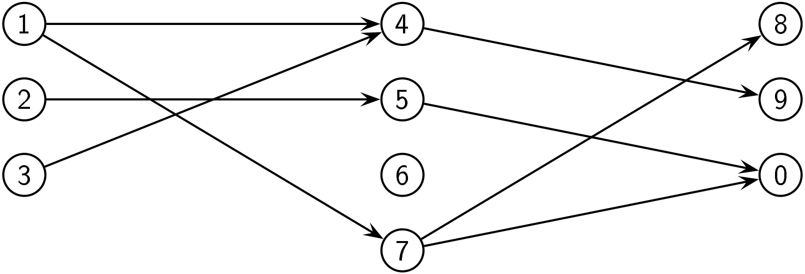
Grafická reprezentácia zloženej relácie

Najprv tu uvedieme grafické znázornenie oboch relácií R a S v tom poradí, v akom vystupujú v argumentoch operácie $R \circ S$:



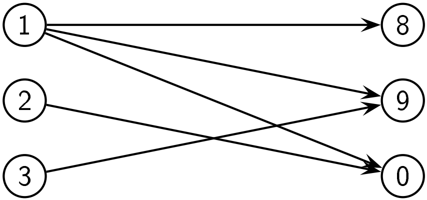
Grafická reprezentácia zloženej relácie

Najprv tu uvedieme grafické znázornenie oboch relácií R a S v tom poradí, v akom vystupujú v argumentoch operácie $R \circ S$:



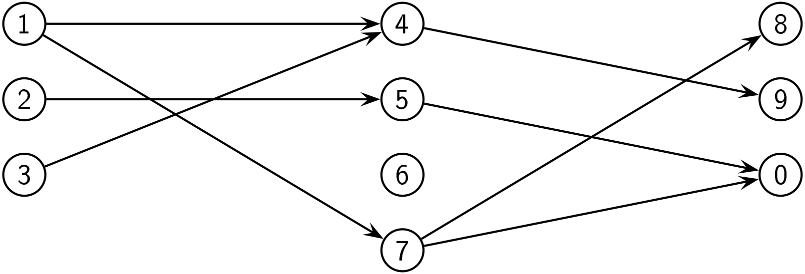
Grafická reprezentácia zloženej relácie

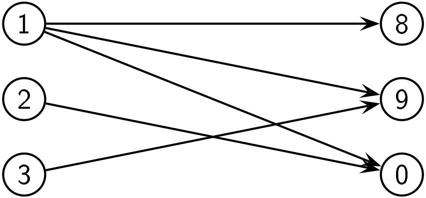
Graficky znázorniť zloženú reláciu $R \circ S$ znamená nájsť také šipky, ktoré spájajú prvky množiny A a C cez nejaký prvok množiny B. Dostaneme tak nasledujúci obrázok:



$$R \circ S = \{(1,8),(1,9),(1,0),(2,0),(3,9)\}.$$

Grafická reprezentácia zloženej relácie





Maticová reprezentácia zloženej relácie

Najprv tu uvedieme maticovú reprezentáciu oboch relácií R a S v tom poradí, v akom vystupujú v argumentoch operácie $R \circ S$:

$$\mathcal{M}(R) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathcal{M}(S) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Maticová reprezentácia zloženej relácie $R \circ S$ má tvar

$$\mathcal{M}(R \circ S) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Maticová reprezentácia zloženej relácie

Boolovskú maticu reprezentujúcu binárnu reláciu $R \circ S$ získame ako boolovský súčin boolovských matíc $\mathcal{M}(R)$ a $\mathcal{M}(S)$:

$$\mathcal{M}(R \circ S) = \mathcal{M}(R) \times \mathcal{M}(S) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Veta
Nech $R \subseteq A \times B$, $S \subseteq B \times C$ *a* $T \subseteq C \times D$. *Potom platí*

$$(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T).$$

Poznámka
Skladanie binárnych relácií je asociatívna operácia. Z toho dôvodu budeme zátvorky vo výrazoch typu $R \circ S \circ T$ vynechávať.

Dôkaz
Priamo z definície operácie zloženia relácií dostaneme, že

$$(R \circ S) \circ T \subseteq A \times D$$
$$R \circ (S \circ T) \subseteq A \times D.$$

Stačí tak dokázať tvrdenie

$$\forall a{\in}A \forall d{\in}D\big((a,d) \in (R \circ S) \circ T \leftrightarrow (a,d) \in R \circ (S \circ T)\big).$$

Nech $a \in A$ a $d \in D$ sú ľubovolné prvky. Potom

$$
\begin{aligned}
&(a,d) \in (R \circ S) \circ T \Leftrightarrow \{\text{z definície zloženej relácie}\}\\
&\exists c{\in}C\big((a,c) \in R \circ S \wedge (c,d) \in T\big) \Leftrightarrow\\
&\qquad \{\text{z definície zloženej relácie}\}\\
&\exists c{\in}C\Big(\exists b{\in}B\big((a,b) \in R \wedge (b,c) \in S\big) \wedge (c,d) \in T\Big) \Leftrightarrow\\
&\exists b{\in}B\Big((a,b) \in R \wedge \exists c{\in}C\big((b,c) \in S \wedge (c,d) \in T\big)\Big) \Leftrightarrow\\
&\qquad \{\text{z definície zloženej relácie}\}\\
&\exists b{\in}B\big((a,b) \in R \wedge (b,d) \in S \circ T\big) \Leftrightarrow\\
&\qquad \{\text{z definície zloženej relácie}\}\\
&(a,d) \in R \circ (S \circ T).
\end{aligned}
$$

Definícia

Nech R je binárna relácia z A do B. Inverznou (opačnou) reláciou k relácii R rozumieme binárnu reláciu R^{-1} z B do A definovanú predpisom

$$R^{-1} = \{(y, x) \in B \times A \mid (x, y) \in R\}.$$

Poznámka

Priamo z definície dostaneme, že

$$\mathrm{D}(R^{-1}) = \mathrm{H}(R)$$
$$\mathrm{H}(R^{-1}) = \mathrm{D}(R).$$

Poznámka

Nech $Y \subseteq B$. Pretože očividne platí

$$\begin{aligned} R^{-1}[Y] &= \{x \in A \mid \exists y{\in}B\big(y \in Y \wedge (x,y) \in R\big)\} \\ &= \{x \in A \mid \exists y{\in}B\big(y \in Y \wedge (y,x) \in R^{-1}\big)\}, \end{aligned}$$

množina $R^{-1}[Y]$, ktorá je podľa definície vzorom množiny Y v relácií R, je zároveň obrazom množiny Y v relácii R^{-1}.

Príklad

Nech R je binárna relácia

$$R = \{(1,4),(1,7),(2,5),(3,4)\}$$

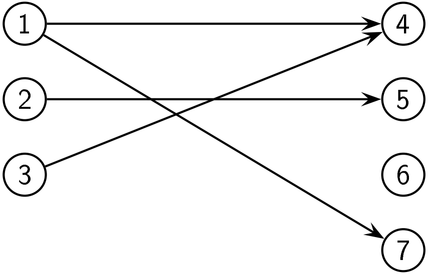
z množiny $A = \{1,2,3\}$ do množiny $B = \{4,5,6,7\}$. Potom jej inverzná relácia

$$R^{-1} = \{(4,1),(4,3),(5,2),(7,1)\}$$

je binárnou reláciou z množiny B do množiny A.

Grafická reprezentácia inverznej relácie

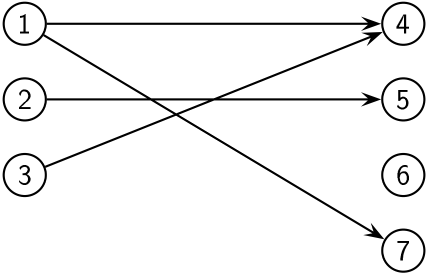
Najprv tu uvedieme grafické znázornenie relácie R:



$$R = \{(1,4),(1,7),(2,5),(3,4)\}$$

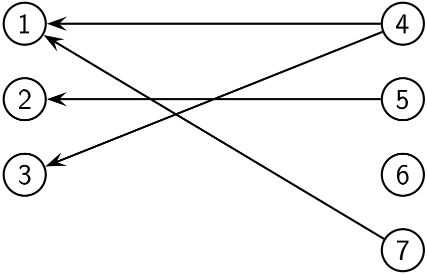
Grafická reprezentácia inverznej relácie

Najprv tu uvedieme grafické znázornenie relácie R:



Grafická reprezentácia inverznej relácie

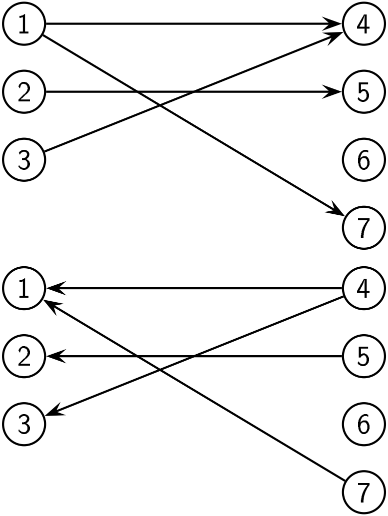
Nasledujúci obrázok graficky znázorňuje inverznú reláciu R^{-1}:



Stačilo len zmeniť smer šipiek v grafickom zobrazení relácie R.

$$R^{-1} = \{(4,1),(4,3),(5,2),(7,1)\}$$

Grafická reprezentácia inverznej relácie



Maticová reprezentácia relácie inverznej relácie

Najprv tu uvedieme maticovú reprezentáciu relácie R:

$$\mathcal{M}(R) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Boolovská matica reprezentújuca inverznú reláciu R^{-1} predstavuje transponovanú maticu k matici $\mathcal{M}(R)$:

$$\mathcal{M}(R^{-1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \mathcal{M}(R)^{\mathrm{T}}.$$

Veta
Nech $R \subseteq A \times B$ a $S \subseteq B \times C$. Potom platí:

$$(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}.$$

Dôkaz
Priamo z definície inverznej relácie dostaneme, že

$$(R \circ S)^{-1} \subseteq C \times A \wedge S^{-1} \circ R^{-1} \subseteq C \times A.$$

Stačí tak dokázať tvrdenie

$$\forall z{\in}C \forall x{\in}A \big((z, x) \in (R \circ S)^{-1} \leftrightarrow (z, x) \in S^{-1} \circ R^{-1}\big).$$

Nech $z \in C$ a $x \in A$ sú ľubovolné prvky. Postupnými úpravami dostaneme

$$(z, x) \in (R \circ S)^{-1} \Leftrightarrow \{\text{z definície inverznej relácie}\}$$

$$(x, z) \in R \circ S \Leftrightarrow \{\text{z definície zloženej relácie}\}$$

$$\exists y{\in}B\big((x, y) \in R \wedge (y, z) \in S\big) \Leftrightarrow$$

$$\exists y{\in}B\big((y, z) \in S \wedge (x, y) \in R\big) \Leftrightarrow \{\text{z definície inverznej relácie}\}$$

$$\exists y{\in}B\big((z, y) \in S^{-1} \wedge (y, x) \in R^{-1}\big) \Leftrightarrow$$

$$\{\text{z definície zloženej relácie}\}$$

$$(z, x) \in S^{-1} \circ R^{-1}.$$

Definícia

Nech R je binárna relácia z A do B. Hovoríme, že relácia R je všade definovaná na množine A, ak $\mathrm{D}(R) = A$, t. j.

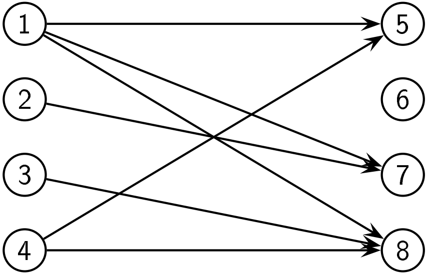
$$\forall x{\in}A \exists y{\in}B \, (x, y) \in R.$$

Poznámka

- V grafovej reprezentácií sa tento pojem dá popísať aj nasledujúcim spôsobom. Aby (konečná) relácia R z A do B bola všade definovaná na A, tak z každého vrcholu oboru A musí viesť aspoň jedna hrana do vrcholov kooboru B.
- V maticovej reprezentácií to znamená, že boolovská matica všade definovanej relácie pozostáva len z takých riadkov, ktoré obsahujú aspoň jednu jednotku.

Príklad

Uvažujme binárnu reláciu R popísanú grafom:



Relácia R je všade definovaná na množine $\{1, 2, 3, 4\}$. Jej inverzná relácia R^{-1} nie je všade definovaná na svojom obore $\{5, 6, 7, 8\}$, pretože $6 \notin \mathrm{D}(R^{-1})$.

Maticová reprezentácia relácie všade definovanej relácie R:

$$\mathcal{M}(R) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Maticová reprezentácia jej inverznej relácie R^{-1}:

$$\mathcal{M}(R^{-1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nie je to všade definovaná relácia – druhý riadok obsahuje samé nuly.

Veta

Nech $|A| = m$ *a* $|B| = n$.

- *Počet všade definovaných relácií z* A *do* B *je rovný číslu*

$$(2^n - 1)^m.$$

- *Počet všade definovaných relácií* R *z* A *do* B *takých, že* $\mathrm{H}(R) = B$, *je rovný číslu*

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (2^{n-k} - 1)^m.$$

Dôkaz 1. tvrdenia

Boolovská matica všade definovanej relácie z A do B pozostáva len z tých riadkov, ktoré obsahujú aspoň jednu jednotku. Každý takýto riadok môžeme vytvoriť $2^n - 1$ spôsobmi. Hľadaný počet je potom jednoduchým dôsledkom kombinatorického násobiaceho princípu:

$$\overbrace{(2^n - 1) \cdot (2^n - 1) \cdot \cdots \cdot (2^n - 1)}^{m\text{-krát}} = (2^n - 1)^m.$$

Veta

Nech $|A| = m$ a $|B| = n$.

- *Počet všade definovaných relácií z A do B je rovný číslu*
$$(2^n - 1)^m.$$
- *Počet všade definovaných relácií R z A do B takých, že $\mathrm{H}(R) = B$, je rovný číslu*
$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (2^{n-k} - 1)^m.$$

Dôkaz 2. tvrdenia

Nech $\mathcal{U}$ je množina všetkých všade definovaných relácií z A do B. Označme $\mathcal{B}_i$ pre $1 \leq i \leq n$ množinu tých prvkov R z $\mathcal{U}$, ktoré majú vlastnosť „i-tý prvok množiny B sa nenachádza v množine $\mathrm{H}(R)$“. Podľa predchádzajúceho tvrdenia všetky množiny $\mathcal{B}_{i_1} \cap \cdots \cap \mathcal{B}_{i_k}$ majú rovnako veľa prvkov pre ľubovolný výber prirodzených čísel k a $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$:

$$|\mathcal{B}_{i_1} \cap \cdots \cap \mathcal{B}_{i_k}| = (2^{n-k} - 1)^m.$$

Podľa princípu zapojenia a vypojenia hľadaný počet je rovný číslu

$$\left|\bigcap_{i=1}^{n} \overline{\mathcal{B}_i}\right| = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \left|\bigcap_{i=1}^{k} \mathcal{B}_i\right| = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (2^{n-k} - 1)^m.$$

Definícia

Nech R je binárna relácia z A do B. Hovoríme, že relácia R je jednoznačná relácia, ak

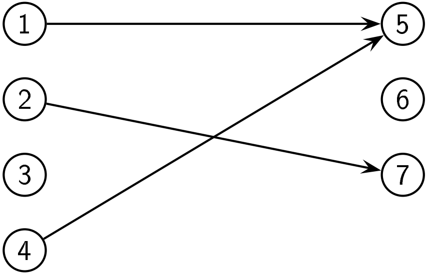
$$\forall x{\in}A \forall y_1{\in}B \forall y_2{\in}B \big((x, y_1) \in R \land (x, y_2) \in R \to y_1 = y_2\big).$$

Poznámka

- V grafovej reprezentácií sa tento pojem dá popísať aj nasledujúcim spôsobom. Aby (konečná) relácia R z A do B bola jednoznačná, tak z každého vrcholu oboru A musí viesť nanajvýš jedna hrana do vrcholov kooboru B.
- V maticovej reprezentácií to znamená, že boolovská matica jednoznačnej relácie pozostáva len z takých riadkov, ktoré obsahujú nanajvýš jednu jednotku.

Príklad

Uvažujme binárnu reláciu R popísanú grafom:



Relácia R je jednoznačná relácia z množiny $\{1, 2, 3, 4\}$ do množiny $\{5, 6, 7\}$. Jej inverzná relácia R^{-1} nie je jednoznačná relácia, pretože $(5, 1) \in R^{-1}$ a $(5, 4) \in R^{-1}$.

Maticová reprezentácia jednoznačnej relácie R:

$$\mathcal{M}(R) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Maticová reprezentácia jej inverznej relácie R^{-1}:

$$\mathcal{M}(R^{-1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nie je to jednoznačná relácia – prvý riadok obsahuje totiž dve jednotky.

Veta

Nech $|A| = m$ *a* $|B| = n$*.*

- *Počet jednoznačných relácií z A do B je rovný číslu*

$$(n+1)^m.$$

- *Počet jednoznačných relácií R z A do B takých, že* $\mathrm{H}(R) = B$*, je rovný číslu*

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k+1)^m.$$

Dôkaz 1. tvrdenia

Boolovská matica jednoznačnej relácie z A do B pozostáva len z tých riadkov, ktoré obsahujú nanajvýš jednu jednotku. Každý takýto riadok môžeme vytvoriť $n+1$ spôsobmi. Hľadaný počet je potom jednoduchým dôsledkom kombinatorického násobiaceho princípu:

$$\overbrace{(n+1)\cdot(n+1)\cdot\dots\cdot(n+1)}^{m\text{-krát}} = (n+1)^m.$$

Veta

Nech $|A| = m$ *a* $|B| = n$.

- *Počet jednoznačných relácií z* A *do* B *je rovný číslu*
$$(n+1)^m.$$
- *Počet jednoznačných relácií* R *z* A *do* B *takých, že* $\mathrm{H}(R) = B$, *je rovný číslu*
$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k+1)^m.$$

Dôkaz 2. tvrdenia

Nech $\mathcal{U}$ je množina všetkých jednoznačných relácií z A do B. Označme $\mathcal{B}_i$ pre $1 \leq i \leq n$ množinu tých prvkov R z $\mathcal{U}$, ktoré majú vlastnosť „i-tý prvok množiny B sa nenachádza v množine $\mathrm{H}(R)$". Podľa predošlého tvrdenia všetky množiny $\mathcal{B}_{i_1} \cap \cdots \cap \mathcal{B}_{i_k}$ majú rovnako veľa prvkov pre ľubovolný výber prirodzených čísel k a $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$:

$$|\mathcal{B}_{i_1} \cap \cdots \cap \mathcal{B}_{i_k}| = (n-k+1)^m.$$

Podľa princípu zapojenia a vypojenia hľadaný počet je rovný číslu

$$\left|\bigcap_{i=1}^{n} \overline{\mathcal{B}_i}\right| = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \left|\bigcap_{i=1}^{k} \mathcal{B}_i\right| = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k+1)^m.$$

Záver

Organizácia predmetu

- 3. domáca úloha.
  - Opravovanie zatiaľ neskončilo.
  - O jeho skončení budete informovaní.
  - Až potom môžete reklamovať hodnotenie u svojho cvičiaceho.
- Konzultácie
  - Dnes o 15.30, m. I-16.
  - V piatok o 12.00, m. I-16 alebo online.
- 4. domáca úloha:
  - Riešenie odovzdať do MOODLE do dnešného večera.
  - Riešenie v editore, nie rukopis.
- 2. semestrálny test:
  - V stredu 29. novembra o 18.10 v m. A a B.
  - Téma: logika, množiny (bez dôkazov množinových identít, nie zobrazenia).
  - Hodnotenie: 40 bodov.

Záver

Otázky

- Ak máte otázku, tak zdvihnite ruku.

Koniec prednášky