1-AIN-121 Diskrétna matematika (1)

Zimný semester 2023/24

9. prednáška

Ján Komara

Obsah prednášky

Základné množinové pojmy

Čo je to množina? (Cantor, 1895)

Množina je súhrn určitých, dobre rozlíšiteľných objektov našej predstavy alebo nášho myslenia, tvoriaci jeden celok. Jednotlivé predmety, ktoré patria do množiny, nazývame prvkami tej množiny.

Jazyk teórie množín

Vlastnosti množín budeme zapisovať v štandardnom logickom formalizme obohateného o binárny predikátový symbol $\in$, pre ktorý požívame infixovú notáciu $x \in A$. Ostatné pojmy, ktoré zavedieme neskôr, definujeme pomocou tohto predikátového symbolu.

Základné množinové pojmy

Byť prvkom množiny

- Zápis $x \in A$ znamená „objekt x je prvkom množiny A“.
- Negáciu tvrdenia $x \in A$ zapisujeme skrátene $x \notin A$.

Notácia

Pre zlepšenie čitateľnosti formúl jazyka teórie množín budeme používať niektoré skrátené označenia. Napr.

$$\forall x{\in}A\, \varphi[x] \equiv \forall x(x \in A \to \varphi[x])$$

$$\exists x{\in}A\, \varphi[x] \equiv \exists x(x \in A \land \varphi[x]).$$

S ostatnými notačnými konvenciami sa postupne zoznámime.

Základné množinové pojmy

Rovnosť množín

Zápis $A = B$ znamená „množiny A a B sú rovnaké, majú tie isté prvky“:

$$A = B \leftrightarrow \forall x (x \in A \leftrightarrow x \in B).$$

Vlastnosť sa nazýva *axióma extenzionality*. Negáciu tvrdenia $A = B$ zapisujeme skrátene $A \neq B$.

Základné množinové pojmy

Vzťah inklúzie

- Zápis $A \subseteq B$ znamená „množina A je podmnožina množiny B“:

$$A \subseteq B \leftrightarrow \forall x (x \in A \rightarrow x \in B).$$

Negáciu tvrdenia $A \subseteq B$ zapisujeme skrátene $A \not\subseteq B$.

- Zápis $A \subset B$ znamená „množina A je vlastná podmnožina množiny B“:

$$A \subset B \leftrightarrow A \subseteq B \wedge A \neq B.$$

Negáciu tvrdenia $A \subset B$ zapisujeme skrátene $A \not\subset B$.

Základné množinové pojmy

Poznámka

- Pri dôkaze rovnosti dvoch množín je možné použiť vzťah inklúzie, pretože platí nasledujúca očividná ekvivalencia:

$$A = B \leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A.$$

- Ak A a B sú podmnožiny nejakej základnej množiny U, potom

$$A = B \leftrightarrow \forall x {\in} U (x \in A \leftrightarrow x \in B)$$

$$A \subseteq B \leftrightarrow \forall x {\in} U (x \in A \rightarrow x \in B).$$

Základné množinové pojmy

Príklady množín

Niektoré množiny sú všeobecne známe. Sú to napríklad tieto číselné množiny:

- množina prirodzených čísel N,
- množina celých čísel $\mathbb{Z}$,
- množina racionálnych čísel $\mathbb{Q}$,
- množina reálnych čísel $\mathbb{R}$.

Základné množinové pojmy

Určenie množiny vymenovaním prvkov

Najjednoduchší spôsob ako určiť množinu je vymenovať všetky jej prvky. Zápis

$$\{a_1, \dots, a_n\}$$

predstavuje konečnú množinu, ktorá pozostáva s prvkov $a_1, \dots, a_n$:

$$\forall x \big(x \in \{a_1, \dots, a_n\} \leftrightarrow x = a_1 \vee \cdots \vee x = a_n \big).$$

Jednoznačnosť popisu množiny plynie z axiómy extenzionality.

Základné množinové pojmy

Určenie množiny vydelením prvkov

Bežnejší spôsob ako zadať množinu je vyčlenením (vydelením) časti vopred danej množiny pomocou podmienky, ktorú majú spĺňať jej prvky. Nech $\varphi[x]$ je výroková forma s jedinou voľnou premennou x. Zápis

$$\{x \in A \mid \varphi[x]\}$$

predstavuje množinu pozostávajúcej práve s tých prvkov x množiny A, ktoré majú vlastnosť $\varphi[x]$:

$$\forall x \big(x \in \{x \in A \mid \varphi[x]\} \leftrightarrow x \in A \wedge \varphi[x]\big).$$

Jednoznačnosť popisu množiny plynie z axiómy extenzionality.

Základné množinové pojmy

Russellov paradox

Pokus o zosilnenie predchádzajúcej definičnej schémy vynechaním požiadavky, aby sa množina tvorila z vopred danej množiny, môže viesť k logickým protirečeniam. Ilustrujeme to na nasledujúcom príklade.
Pokúsme sa vytvoriť množinu R, ktorej prvky x majú vlastnosť $x \notin x$:

$$\forall x(x \in R \leftrightarrow x \notin x). \tag{1}$$

Predpokladajme, že taká množina R existuje. Potom pre R dosadené v (1) za x dostaneme

$$R \in R \leftrightarrow R \notin R.$$

To je očividne nepravdivé tvrdenie, dostali sme spor. Dôsledok: množina R s vlastnosťou (1) neexistuje.

Základné množinové pojmy

Univerzálna množina

Univerzálnou množinou rozumieme takú množinu, ktorá obsahuje všetky množiny. Ukážeme si, že takáto množina neexistuje.
Pokúsme sa vytvoriť množinu V, ktorá obsahuje všetky množiny:

$$\forall x(x \in V \leftrightarrow x = x). \tag{2}$$

Predpokladajme, že takáto množina existuje. Vydelením prvkov z množiny V pomocou podmienky $x \notin x$ dostaneme množinu

$$R = \{x \in V \mid x \notin x\}.$$

Ľahko sa ukáže, že pre množinu R platí vzťah

$$\forall x(x \in R \leftrightarrow x \notin x).$$

Existencia takejto množiny R vedie ale k sporu (Russellov paradox).
Dôsledok: množina V s vlastnosťou (2) neexistuje.

Základné množinové pojmy

Určenie množiny charakteristickou vlastnosťou

Nech $\varphi[x]$ je výroková forma s jedinou voľnou premennou x. Podľa predchádzajúceho príkladu nemáme zaručené, že existuje množina určená touto vlastnosťou, t. j. že platí

$$\exists M \forall x (x \in M \leftrightarrow \varphi[x]).$$

Ak sa presvedčíme, že taká množina existuje, označíme ju takto

$$\{x \mid \varphi[x]\}.$$

V takomto prípade platí

$$\forall x \big(x \in \{x \mid \varphi[x]\} \leftrightarrow \varphi[x]\big).$$

Jednoznačnosť popisu množiny plynie z axiómy extenzionality. Výroková forma $\varphi[x]$ sa nazýva charakteristická vlastnosť tejto množiny.

Základné množinové pojmy

Poznámka

- Určenie množiny vymenovaním jej prvkov je špeciálnym prípadom určenia množiny charakteristickou vlastnosťou:

$$\{a_1, \ldots, a_n\} = \{x \mid x = a_1 \vee \cdots \vee x = a_n\}.$$

- Určenie množiny vydelením jej prvkov z nejakej množiny je špeciálnym prípadom určenia množiny charakteristickou vlastnosťou:

$$\{x \in A \mid \varphi[x]\} = \{x \mid x \in A \wedge \varphi[x]\}.$$

Základné množinové operácie

Úvodná poznámka

- V tejto časti sa budeme venovať základným množinovým operáciam, ktoré nám umožnia vytvoriť jednoduchým spôsobom nové množiny z daných.
- Jednoznačnosť popisu jednotlivých množinových operácií plynie z axiómy extenzionality.
- Pri neformálnom popise množinových operácií a ich vlastností budeme používať Vennove diagramy. Vtedy predpokladáme, že všetky množiny, s ktorými pracujeme, sú podmnožiny nejakej základnej množiny.

Základné množinové operácie

Prázdna množína

Zápis $\emptyset$ označuje prázdnu množinu:

$$\emptyset = \{x \mid x \neq x\}.$$

Odtiaľ dostávame, že $\forall x\, x \notin \emptyset$, t. j. $\neg\exists x\, x \in \emptyset$.

Základné množinové operácie

Zjednotenie množín

Zápis $A \cup B$ znamená zjednotenie množín A a B:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}.$$

Poznámka

Ak A a B sú podmnožiny nejakej základnej množiny U, potom

$$A \cup B = \{x \in U \mid x \in A \vee x \in B\}.$$

Základné množinové operácie

Prienik množín

Zápis $A \cap B$ znamená prienik množín A a B:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}.$$

Všimnime si, že platí

$$A \cap B = \{x \in A \mid x \in B\} = \{x \in B \mid x \in A\}.$$

Poznámka

Ak A a B sú podmnožiny nejakej základnej množiny U, potom

$$A \cap B = \{x \in U \mid x \in A \wedge x \in B\}.$$

Základné množinové operácie

Rozdiel množín

Zápis $A \setminus B$ znamená rozdiel (diferenciu) množín A a B:

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}.$$

Všimnime si, že platí

$$A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\}.$$

Poznámka

Ak A a B sú podmnožiny nejakej základnej množiny U, potom

$$A \setminus B = \{x \in U \mid x \in A \wedge x \notin B\}.$$

Základné množinové operácie

Doplnok množiny

Nech A je podmnožina nejakej základnej množiny U. Zápis $\overline{A}$ znamená doplnok (komplement) množiny A do U:

$$\overline{A} = \{x \in U \mid x \notin A\}.$$

Všimnime si, že platí

$$\overline{A} = U \setminus A.$$

Poznámka

Všimnime si, že v označení $\overline{A}$ nie je explicitne uvedená základná množina U. Aby sme jednoznačne určili zmysel takéhoto zápisu, budeme požívať nasledujúcu konvenciu: doplnkom budeme rozumieť vždy doplnok do nejakej základného univerza, ktorý je známy z kontextu.

Základné množinové operácie

Potenčná množina

Zápis $\mathcal{P}(A)$ znamená potenčnú množinu množiny A:

$$\mathcal{P}(A) = \{B \mid B \subseteq A\}.$$

Základné množinové operácie

Usporiadané dvojice

- Zápis (x, y) značí usporiadanú dvojicu objektov x a y (v tomto poradí). Prvok x resp. y sa nazýva prvá resp. druhá projekcia (súradnica, zložka) usporiadanej dvojice.
- Základnú vlastnosť usporiadaných dvojíc vyjadruje tento vzťah

$$(x_1, x_2) = (y_1, y_2) \leftrightarrow x_1 = y_1 \wedge x_2 = y_2.$$

- Usporiadané dvojice môžeme definovať napríklad takýmto predpisom

$$(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}.$$

Základné množinové operácie

Karteziánsky súčin dvoch množín

Zápis $A \times B$ znamená karteziánsky súčin množín A a B:

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \wedge y \in B\},$$

t. j.

$$A \times B = \{z \mid \exists x \in A \exists y \in B\, z = (x, y)\}.$$

Ak obe množiny sú konečné, tak

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|\,.$$

Karteziánska druhá mocnina

Zápis A^2 znamená karteziánsku druhú mocninu množiny A:

$$A^2 = A \times A = \{(x, y) \mid x \in A \wedge x \in A\}.$$

Základné množinové identity

Vlastnosti zjednotenia a prieniku

Komutatívny a asociatívny zákon pre zjednotenie

$$A \cup B = B \cup A$$
$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C.$$

Komutatívny a asociatívny zákon pre prienik

$$A \cap B = B \cap A$$
$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C.$$

Distributívne zákony pre zjednotenie a prienik

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Základné množinové identity

Vlastnosti rozdielu a doplnku

De Morganove zákony pre rozdiel

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$$

$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C).$$

De Morganove zákony pre doplnok

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

Základné množinové identity

Tvrdenie

Nech A a B sú podmnožiny základnej množiny U. Potom platí

$$A \subseteq B \leftrightarrow \overline{B} \subseteq \overline{A}.$$

Poznámka

Pri dôkaze využijeme tieto vlastnosti:

$$A \subseteq B \leftrightarrow \forall x{\in}U(x \in A \rightarrow x \in B)$$

$$\overline{A} = \{x \in U \mid x \notin A\}.$$

Základné množinové identity

Dôkaz

Postupnými úpravami dostaneme

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \{\text{z definície podmnožiny}\}$$

$$\forall x \in U(x \in A \to x \in B) \Leftrightarrow$$

$$\forall x \in U(x \notin B \to x \notin A) \Leftrightarrow \{\text{z definície doplnku}\}$$

$$\forall x \in U(x \in \overline{B} \to x \in \overline{A}) \Leftrightarrow \{\text{z definície podmnožiny}\}$$

$$\overline{B} \subseteq \overline{A}.$$

Základné množinové identity

Lema

Nech A, B, C sú ľubovoľné množiny. Potom platí

$$C \subseteq A \cap B \leftrightarrow C \subseteq A \wedge C \subseteq B.$$

Poznámka

Pri dôkaze využijeme tieto vlastnosti:

$$A \subseteq B \leftrightarrow \forall x (x \in A \rightarrow x \in B)$$

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}.$$

Základné množinové identity

Dôkaz

Postupnými úpravami dostaneme

$$C \subseteq A \cap B \Leftrightarrow \{\text{z definície podmnožiny}\}$$

$$\forall x (x \in C \to x \in A \cap B) \Leftrightarrow \{\text{z definície prieniku}\}$$

$$\forall x (x \in C \to x \in A \wedge x \in B) \Leftrightarrow$$

$$\forall x \left((x \in C \to x \in A) \wedge (x \in C \to x \in B) \right) \Leftrightarrow$$

$$\forall x (x \in C \to x \in A) \wedge \forall x (x \in C \to x \in B) \Leftrightarrow$$

$$\{\text{z definície podmnožiny}\}$$

$$C \subseteq A \wedge C \subseteq B.$$

Základné množinové identity

Tvrdenie

Nech A, B sú ľubovolné množiny. Potom platí

$$\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B).$$

Poznámka

Pri dôkaze využijeme tieto vlastnosti:

$$A = B \leftrightarrow \forall x (x \in A \leftrightarrow x \in B)$$

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

$$\mathcal{P}(A) = \{B \mid B \subseteq A\}.$$

Základné množinové identity

Dôkaz

Podľa axiómy extenzionality stačí dokázať, že platí

$$\forall C\big(C \in \mathcal{P}(A \cap B) \leftrightarrow C \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)\big).$$

Zvoľme si ľubovolnú množinu C. Postupnými úpravami dostaneme

$$C \in \mathcal{P}(A \cap B) \Leftrightarrow \{\text{z definície potenčnej množiny}\}$$

$$C \subseteq A \cap B \Leftrightarrow \{\text{predchádzajúca lema}\}$$

$$C \subseteq A \wedge C \subseteq B \Leftrightarrow \{\text{z definície potenčnej množiny}\}$$

$$C \in \mathcal{P}(A) \wedge C \in \mathcal{P}(B) \Leftrightarrow \{\text{z definície prieniku}\}$$

$$C \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B).$$

Základné množinové identity

Tvrdenie

Nech A a B sú množiny. Potom platí

$$A \subseteq B \leftrightarrow A \cap B = A.$$

Poznámka

Pri dôkaze využijeme tieto vlastnosti:

$$A = B \leftrightarrow \forall x (x \in A \leftrightarrow x \in B)$$

$$A \subseteq B \leftrightarrow \forall x (x \in A \rightarrow x \in B)$$

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}.$$

Základné množinové identity

Dôkaz

Postupnými úpravami dostaneme

$$A \cap B = A \Leftrightarrow \{\text{podľa axiómu extenzionality}\}$$

$$\forall x(x \in A \cap B \leftrightarrow x \in A) \Leftrightarrow \{\text{z definície prieniku}\}$$

$$\forall x(x \in A \wedge x \in B \leftrightarrow x \in A) \Leftrightarrow$$

$$\forall x\big((x \in A \wedge x \in B \rightarrow x \in A) \wedge (x \in A \rightarrow x \in A \wedge x \in B)\big) \Leftrightarrow$$

$$\forall x(x \in A \wedge x \in B \rightarrow x \in A) \wedge \forall x(x \in A \rightarrow x \in A \wedge x \in B) \Leftrightarrow$$

$$\forall x(x \in A \rightarrow x \in B) \Leftrightarrow \{\text{z definície podmnožiny}\}$$

$$A \subseteq B.$$

Základné množinové identity

Tvrdenie

Nech A a B sú množiny. Potom platí

$$A \subseteq B \leftrightarrow A \cap B = A.$$

Poznámka

Pri dôkaze využijeme tieto vlastnosti:

$$A = B \leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A \tag{1}$$

$$A \cap B \subseteq A \tag{2}$$

$$C \subseteq A \cap B \leftrightarrow C \subseteq A \wedge C \subseteq B \tag{3}$$

$$A \subseteq A. \tag{4}$$

Základné množinové identity

Dôkaz

Postupnými úpravami dostaneme

$$
\begin{aligned}
&A \cap B = A \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \\
&A \cap B \subseteq A \wedge A \subseteq A \cap B \overset{(2)}{\Leftrightarrow} \\
&A \subseteq A \cap B \overset{(3)}{\Leftrightarrow} \\
&A \subseteq A \wedge A \subseteq B \overset{(4)}{\Leftrightarrow} \\
&A \subseteq B.
\end{aligned}
$$

Záver

Literatúra (množiny)

- Jajcayová, T., Komara, J.: vlastné elektronické texty zverejňované na webovej stránke predmetu.
- Grimaldi, R. P.: Discrete and Combinatorial Mathematics. Boston : Pearson / Addison-Wesley, 2004.
- Bukovský, L.: Množiny a všeličo okolo nich. Košice: Univerzita Pavla Jozefa Šafárika, 2005 (2. vydanie).

Doplňujúca literatúra (množiny)

- Olejár, D., Škoviera, M.: Diskrétna matematika 1: Úvod do teórie množín, teórie booleovských funkcií a matematickej logiky. Bratislava: Univerzita Komenského, 1992.
- Olejár, D., Škoviera, M.: Úvod do diskrétnych matematických štruktúr. 2007. Elektronický učebný text, 2007, Prístupný len z UK: http://www.dcs.fmph.uniba.sk/texty/dsmain.pdf

Záver

Organizácia predmetu

- Konzultácie
  - Dnes o 14.30, m. I-16.
  - V piatok o 12.00, m. I-16 alebo online.
- 3. domáca úloha:
  - Riešenie odovzdať do MOODLE do dnešného večera.
  - Riešenie v editore, nie rukopis.
- 4. domáca úloha
  - Zadanie sa objaví na našom webe zajtra.
  - Odovzdať do pondelka 20. novembra.
- 1. semestrálny test:
  - V stredu 29. novembra o 18.10 v m. A a B.
  - Téma: logika, množiny.
  - Hodnotenie: 40 bodov.

Záver

Otázky

- Ak máte otázku, tak zdvihnite ruku.

Koniec prednášky