1-AIN-121 Diskrétna matematika (1)

Zimný semester 2023/24

7. prednáška

Ján Komara

Obsah prednášky

Matematické dôkazy

Základné druhy matematických dôkazov

- Leibnizovo pravidlo
  - Leibnizovo pravidlo pre rovnosť
  - Leibnizovo pravidlo pre ekvivalenciu
- Dôkaz implikácie
  - Priamy dôkaz
  - Nepriamy dôkaz
  - Dôkaz sporom
- Dôkaz rozborom prípadov
- Dôkaz myslenou konštrukciou
- Dôkaz indukciou
  - Princíp matematickej indukcie
  - Princíp silnej matematickej indukcie
  - Princíp úplnej matematickej indukcie

Princíp matematickej indukcie

Definícia

Pre každú formulu $\varphi[x]$, princíp matematickej indukcie podľa premennej x pre formulu φ je nasledujúce tvrdenie:

$$\varphi[0] \land \forall x(\varphi[x] \to \varphi[x+1]) \to \forall x \varphi[x].$$

Indukčná formula φ môže obsahovať okrem indukčnej premennej x aj iné volné premenné ako parametre.

- Formula $\varphi[0]$ sa nazýva báza (základný krok) indukcie.
- Formula $\forall x(\varphi[x] \to \varphi[x+1])$ nazýva indukčný krok.
  - Formula $\varphi[x]$ sa nazýva indukčný predpoklad.
  - Formula $\varphi[x+1]$ sa nazýva záver indukčného kroku.

Príklad

Princíp matematickej indukcie ilustrujeme na dôkaze identity:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

Ukážeme si tri zdôvodnenia platnosti tvrdenia

- „Dôkaz“ testovaním.
- Kombinatorický dôkaz.
- Algebraický dôkaz.

Princíp matematickej indukcie

Počet všetkých podmnožín

„Dôkaz“ testovaním

Overením platnosti vzťahu pre vybrané čísla:

$$\binom{0}{0} = 1 = 2^0$$

$$\binom{1}{0} + \binom{1}{1} = 1 + 1 = 2 = 2^1$$

$$\binom{2}{0} + \binom{2}{1} + \binom{2}{2} = 1 + 2 + 1 = 4 = 2^2$$

$$\binom{3}{0} + \binom{3}{1} + \binom{3}{2} + \binom{3}{3} = 1 + 3 + 3 + 1 = 8 = 2^3$$

$$\binom{4}{0} + \binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4} = 1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16 = 2^4.$$

Princíp matematickej indukcie

Počet všetkých podmnožín

$$\binom{0}{0}$$

$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$

$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$

$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$

$$\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4}$$

Kombinatorický dôkaz

Ukážeme, že ľavá i pravá strana rovnosti

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

predstavuje počet podmnožín n-prvkovej množiny.

- Kombinačné číslo $\binom{n}{k}$ vyjadruje počet k-prvkových podmnožín n-prvkovej množiny. Súčet na ľavej strane tak znamená počet podmnožín n-prvkovej množiny.
- Zostrojime bijekciu medzi podmnožinami n-prvkovej množiny a n-bitovými slovami. Počet n-bitových slov poznáme, je ich 2^n. Podľa kombinatorického princípu bijekcie počet podmnožín n-prvkovej množiny je ten istý.

Algebraický dôkaz

Pomocou matematickej indukcie. Využijeme tieto dve vlastnosti:

$$\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} = 1 \tag{1}$$

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} = 2 \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}. \tag{2}$$

Kombinatorický dôkaz (1)

$$\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} = \text{počet podmnožín prázdnej množiny} = 1$$

Algebraický dôkaz (1)

$$\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} = \binom{0}{0} = 1$$

Algebraický dôkaz

Pomocou matematickej indukcie. Využijeme tieto dve vlastnosti:

$$\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} = 1 \tag{1}$$

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} = 2 \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}. \tag{2}$$

Kombinatorický dôkaz (2)

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} = \text{počet podmnožín množiny } \{1, \ldots, n, n+1\}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \text{počet podmnožín množiny } \{1, \ldots, n\}.$$

Nech A je podmnožina množiny $\{1, \ldots, n, n+1\}$. Môžu nastať dva prípady:

- $n+1 \in A$. Takých podmnožín je $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$.
- $n+1 \notin A$. Takých podmnožín je $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$.

Teraz stačí použiť kombinatorický princíp súčtu a dostaneme (2).

Princíp matematickej indukcie

Počet všetkých podmnožín

Algebraický dôkaz

Pomocou matematickej indukcie. Využijeme tieto dve vlastnosti:

$$\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} = 1 \qquad (1)$$

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} = 2\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}. \qquad (2)$$

Pascalova formula

V algebraickom dôkaze (2) využijeme túto vlastnosť kombinačných čísel pre $k \geq 1$:

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}. \qquad (3)$$

Algebraický dôkaz (2)

Postupnými úpravami dostaneme

$$\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k} = \binom{n+1}{0} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k} + \binom{n+1}{n+1} \overset{(3)}{=}$$

$$1 + \sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right) + 1 = 1 + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1} + 1 =$$

$$1 + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k} + \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k} + 1 = \binom{n}{0} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k} + \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k} + \binom{n}{n} =$$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.$$

Princíp matematickej indukcie

Počet všetkých podmnožín

Veta

Pre ľubovolné prirodzené číslo n platí vzťah

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

Dôkaz

Tvrdenie dokážeme matematickou indukciou podľa n.

Báza indukcie

Dokazujeme tvrdenie

$$\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} = 2^0.$$

Princíp matematickej indukcie

Dôkaz bázy indukcie

Tvrdenie pre $n = 0$ platí, pretože:

$$\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} \overset{(1)}{=} 1 = 2^0.$$

Princíp matematickej indukcie

Počet všetkých podmnožín

Veta

Pre ľubovolné prirodzené číslo n platí vzťah

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

Dôkaz

Tvrdenie dokážeme matematickou indukciou podľa n.

Indukčný krok

Dokazujeme tvrdenie

$$\forall n \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n \to \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} = 2^{n+1} \right).$$

Princíp matematickej indukcie

Počet všetkých podmnožín

Dôkaz indukčného kroku

Predpokladajme, že tvrdenie platí pre n:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n. \qquad \text{IP}$$

To je indukčný predpoklad. Ukážeme, že platí aj pre $n+1$:

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} = 2^{n+1}.$$

Skutočne, postupnými úpravami totiž dostaneme

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \overset{(2)}{=} 2\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \overset{\text{IP}}{=} 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}.$$

Príklad

Nech a_n je postupnosť prirodzených čísel definovaná vzťahom:

$$a_0 = 0$$
$$a_{n+1} = 3a_n + 1.$$

Dokážte, že pre každé prirodzené číslo n platí nerovnosť

$$a_n < 3^n.$$

n	0	1	2	3	4	5	...
a_n	0	1	4	13	40	121	...
3^n	1	3	9	27	81	243	...

Dôkaz

Tvrdenie dokážeme matematickou indukciou.

Báza indukcie

Pre $n = 0$ tvrdenie platí, pretože

$$a_0 = 0 < 1 = 3^0.$$

Princíp matematickej indukcie

Dôkaz nerovnosti

Príklad

Nech a_n je postupnosť prirodzených čísel definovaná vzťahom:

$$a_0 = 0$$
$$a_{n+1} = 3a_n + 1.$$

Dokážte, že pre každé prirodzené číslo n platí nerovnosť

$$a_n < 3^n.$$

n	0	1	2	3	4	5	...
a_n	0	1	4	13	40	121	...
3^n	1	3	9	27	81	243	...

Dôkaz

Tvrdenie dokážeme matematickou indukciou.

Indukčný krok

Zvoľme si ľubovolné prirodzené číslo n. Predpokladajme, že tvrdenie platí pre n:

$$a_n < 3^n. \tag{IP}$$

To je indukčný predpoklad. Dokážeme, že to platí aj pre $n+1$:

$$a_{n+1} < 3^{n+1}.$$

Postupnými úpravami dostaneme

$$a_{n+1} = 3a_n + 1 \overset{\text{IP}}{<} 3 \cdot 3^n + 1 = 3^{n+1} + 1.$$

Nedokázali sme to!

Princíp matematickej indukcie

Dôkaz nerovnosti

Príklad

Nech a_n je postupnosť prirodzených čísel definovaná vzťahom:

$$a_0 = 0$$
$$a_{n+1} = 3a_n + 1.$$

Dokážte, že pre každé prirodzené číslo n platí nerovnosť

$$a_n < 3^n.$$

n	0	1	2	3	4	5	...
a_n	0	1	4	13	40	121	...
3^n	1	3	9	27	81	243	...

Dôkaz

Tvrdenie dokážeme matematickou indukciou.

Indukčný krok

Zvoľme si ľubovolné prirodzené číslo n. Predpokladajme, že tvrdenie platí pre n:

$$a_n < 3^n. \tag{IP}$$

To je indukčný predpoklad. Dokážeme, že to platí aj pre $n+1$:

$$a_{n+1} < 3^{n+1}.$$

Postupnými úpravami dostaneme

$$a_{n+1} = 3a_n + 1 = 3(a_n + 1) - 2 \overset{\text{IP}}{\leq} 3 \cdot 3^n - 2 = 3^{n+1} - 2 < 3^{n+1}.$$

Dokázali sme to!

Princíp silnej matematickej indukcie

Silná matematická indukcia

Definícia

Pre každú formulu $\varphi[x]$, princíp silnej matematickej indukcie podľa premennej x pre formulu φ a $k \geq 0$ je nasledujúce tvrdenie:

$$\varphi[0] \land \cdots \land \varphi[k] \land \\ \forall x\,(\varphi[x] \land \cdots \land \varphi[x+k] \to \varphi[x+k+1]) \to \forall x \varphi[x].$$

Indukčná formula φ môže obsahovať okrem indukčnej premennej x aj iné voľné premenné ako parametre.

- Báza indukcie pozostáva s $k{+}1$ členov $\varphi[0], \ldots, \varphi[k]$.
- Indukčný krok má $k{+}1$ indukčných predpokladov $\varphi[x], \ldots, \varphi[x+k]$.

Princíp silnej matematickej indukcie

Špeciálny prípad pre $k = 0$

$$\varphi[0] \wedge \forall x\, (\varphi[x] \to \varphi[x+1]) \to \forall x \varphi[x].$$

Princíp matematickej indukcie je špeciálny prípad princípu silnej matematickej indukcie.

Špeciálny prípad pre $k = 1$

$$\varphi[0] \wedge \varphi[1] \wedge \forall x\, (\varphi[x] \wedge \varphi[x+1] \to \varphi[x+2]) \to \forall x \varphi[x].$$

- Báza indukcie pozostáva s dvoch členov $\varphi[0]$ a $\varphi[1]$.
- Indukčný krok má dva indukčné predpoklady $\varphi[x]$ a $\varphi[x+1]$.

Poznámka

Na nasledujúcom probléme ilustrujeme princíp silnej matematickej indukcie.

Pokrytie šachovnice dominovými kameňmi

Určiť počet pokrytí šachovnice rozmerov $2 \times n$ dominovými kameňmi rozmerov 2×1, 1×2 a 2×2 pre $n \geq 0$.

Označenie

a_n je počet pokrytí šachovnice rozmerov $2 \times n$ dominovými kameňmi rozmerov 2×1, 1×2 a 2×2 pre $n \geq 0$.

Princíp silnej matematickej indukcie

Pokrytie šachovnice dominovými kameňmi

Úloha

Určite hodnotu a_n pre $n = 0, 1, 2, 3, 4$.

Princíp silnej matematickej indukcie

Pokrytie šachovnice dominovými kameňmi

Úloha

Určite hodnotu a_n pre $n \geq 2$.

Princíp silnej matematickej indukcie

Rekurentný vzťah

Ukázali sme, že platí

$$\begin{aligned} a_0 &= 1 \\ a_1 &= 1 \\ a_{n+2} &= a_{n+1} + 2a_n. \end{aligned}$$

Veta

Pre ľubovolné prirodzené číslo n platí vzťah

$$a_n = \frac{2^{n+1} + (-1)^n}{3}.$$

Princíp silnej matematickej indukcie

Dôkaz

Tvrdenie dokážeme pomocou princípu silnej matematickej indukcie.

Princíp silnej matematickej indukcie

Pokrytie šachovnice dominovými kameňmi

$$
\begin{aligned}
a_0 &= 1 \\
a_1 &= 1 \\
a_{n+2} &= a_{n+1} + 2a_n.
\end{aligned}
$$

$$a_n = \frac{2^{n+1} + (-1)^n}{3}.$$

Princíp silnej matematickej indukcie

Pokrytie šachovnice dominovými kameňmi

Báza indukcie

Pre $n = 0$ tvrdenie platí, pretože

$$a_0 = 1 = \frac{3}{3} = \frac{2+1}{3} = \frac{2^1 + (-1)^0}{3} = \frac{2^{0+1} + (-1)^0}{3}.$$

Pre $n = 1$ tvrdenie platí tiež, pretože

$$a_1 = 1 = \frac{3}{3} = \frac{4 + (-1)}{3} = \frac{2^2 + (-1)^1}{3} = \frac{2^{1+1} + (-1)^1}{3}.$$

Princíp silnej matematickej indukcie

Pokrytie šachovnice dominovými kameňmi

$$\begin{aligned} a_0 &= 1 \\ a_1 &= 1 \\ a_{n+2} &= a_{n+1} + 2a_n. \end{aligned}$$

$$a_n = \frac{2^{n+1} + (-1)^n}{3}.$$

Indukčný krok

Zvoľme si ľubovolné prirodzené číslo n. Predpokladajme, že tvrdenie platí pre n a $n+1$:

$$a_n = \frac{2^{n+1} + (-1)^n}{3} \qquad a_{n+1} = \frac{2^{n+1+1} + (-1)^{n+1}}{3}. \qquad \text{IP}$$

To sú indukčné predpoklady. Dokážeme, že to platí aj pre $n+2$:

$$a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n \overset{\text{IP}}{=} \frac{2^{n+2} + (-1)^{n+1}}{3} + 2\frac{2^{n+1} + (-1)^n}{3} =$$

$$\frac{2^{n+2} - (-1)^n + 2^{n+2} + 2(-1)^n}{3} = \frac{2^{n+3} + (-1)^n}{3} =$$

$$\frac{2^{n+3} + (-1)^n(-1)^2}{3} = \frac{2^{n+3} + (-1)^{n+2}}{3} = \frac{2^{n+2+1} + (-1)^{n+2}}{3}.$$

Záver

Organizácia predmetu

- 2. domáca úloha
  - Opravovanie zatiaľ neskončilo.
  - O jeho skončení budete informovaní.
  - Až potom môžete reklamovať hodnotenie u svojho cvičiaceho.
- 1. semestrálny test
  - Opravovanie zatiaľ neskončilo.
  - O jeho skončeni budete informovaní.
  - Až potom budete môcť reklamovať hodnotenie u svojho cvičiaceho.
  - Náhradný termín:
    - Týka sa to len tých študentov, ktorí nemohli prísť na riadny termín zo závažných dôvodov (napr. pre chorobu).
- Konzultácie
  - Dnes o 14.30, m. I-16.

Záver

Otázky

- Ak máte otázku, tak zdvihnite ruku.

Koniec prednášky