1-AIN-121 Diskrétna matematika (1)

Zimný semester 2023/24

6. prednáška

Ján Komara

Obsah prednášky

Zopakovanie

Výrokovologické spojky a kvantifikátory

- Negácia $\neg$ vo výroku $\neg A$. Čítaj „nie A“.
- Konjunkcia $\wedge$ vo výroku $A \wedge B$. Čítaj „A a (zároveň) B“.
- Disjunkcia $\vee$ vo výroku $A \vee B$. Čítaj „A alebo B“; „platí aspoň jedno z tvrdení A a B“.
- Implikácia $\rightarrow$ vo výroku $A \rightarrow B$. Čítaj „ak A, potom B“; „ak A, tak aj B“; „A implikuje B“; „z A vyplýva B“.
- Ekvivalencia (obojstranná implikácia) $\leftrightarrow$ vo výroku $A \leftrightarrow B$. Čítaj „A práve vtedy, keď B“.
- Všeobecný (univerzálny, veľký) kvantifikátor $\forall x$ vo výroku $\forall x A$. Čítaj „pre každé x platí A“; „o každom x platí A“.
- Existenčný (malý) kvantifikátor $\exists x$ vo výroku $\exists x A$. Čítaj „existuje (aspoň jedno) x také, že platí A“.

Zopakovanie

Tabuľka pravdivostných hodnôt

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \rightarrow B$	$A \leftrightarrow B$
pravda	pravda	pravda	pravda	pravda	pravda
pravda	nepravda	nepravda	pravda	nepravda	nepravda
nepravda	pravda	nepravda	pravda	pravda	nepravda
nepravda	nepravda	nepravda	nepravda	pravda	pravda

Zopakovanie

Definícia

Tautológiou rozumieme také tvrdenie, ktoré je vždy pravdivé na základe svojej výrokovologickej štruktúry.

Príklady tautológií

$$(A \to B) \leftrightarrow \neg B \to \neg A$$

$$(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow (A \to B) \wedge (B \to A)$$

Zopakovanie

Definícia

Logickým platným tvrdením rozumieme také tvrdenie, ktoré je vždy pravdivé na základe svojej výrokovologickej a kvantifikátorovej štruktúry.

Príklady logických platných tvrdení

$$\forall x(A \to B) \leftrightarrow \forall x(\neg B \to \neg A)$$

$$\forall x(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow \forall x(A \to B) \wedge \forall x(B \to A)$$

Zopakovanie

Definícia (neformálny jazyk)

Prirodzené číslo x delí prirodzené číslo y, ak $y = xz$ pre nejaké prirodzené číslo z.

Definícia (neformálny jazyk)

Prirodzené číslo x je prvočíslom, ak má práve dva delitele.

Veta (neformálny jazyk)

Prvočísel je nekonečne mnoho.

Zopakovanie

Definícia (formálny jazyk)

$$\forall x \forall y (x \mid y \leftrightarrow \exists z\, y = xz).$$

Definícia (formálny jazyk)

$$\forall x (Pr(x) \leftrightarrow x > 1 \wedge \forall d (d \mid x \rightarrow d = 1 \vee d = x)).$$

Veta (formálny jazyk)

$$\forall n \exists x (x > n \wedge Pr(x)).$$

Zopakovanie

Logika (stručné sylaby)

- 5. týždeň
  Jazyk logiky: syntax a sémantika.
- 6. týždeň
  Leibnizovo pravidlo. Dôkaz implikácie. Dôkaz rozborom prí-padov. Dôkaz myslenou konštrukciou.
- 7. a 8. týždeň
  Dôkaz indukciou.

Zopakovanie

Literatúra

- Jajcayová, T., Komara, J.: vlastné elektronické texty zverejňované na webovej stránke predmetu.
- Olejár, D., Škoviera, M.: Úvod do diskrétnych matematických štruktúr. 2007. Elektronický učebný text, 2007, Prístupný len z UK: http://www.dcs.fmph.uniba.sk/texty/dsmain.pdf
- Grimaldi, R. P.: Discrete and Combinatorial Mathematics. Boston : Pearson / Addison-Wesley, 2004.

Matematické dôkazy

Základné druhy matematických dôkazov

- Leibnizovo pravidlo
  - Leibnizovo pravidlo pre rovnosť
  - Leibnizovo pravidlo pre ekvivalenciu
- Dôkaz implikácie
  - Priamy dôkaz
  - Nepriamy dôkaz
  - Dôkaz sporom
- Dôkaz rozborom prípadov
- Dôkaz myslenou konštrukciou
- Dôkaz indukciou
  - Princíp matematickej indukcie
  - Princíp silnej matematickej indukcie
  - Princíp úplnej matematickej indukcie

Príklad

Dokážte, že nad oborom reálnych čísel platí rovnosť

$$\forall x \forall y \, (x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3.$$

Dôkaz

V dôkaze využijeme túto vlastnosť:

$$\forall x \forall y \, (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2. \tag{1}$$

Nech x a y sú ľubovolné, ale pevne zvolené reálne čísla. Potom

$$(x+y)^3 = (x+y)(x+y)^2 \stackrel{(1)}{=} (x+y)(x^2+2xy+y^2) =$$
$$x^3 + 2x^2y + xy^2 + x^2y + 2xy^2 + y^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3.$$

Príklad

Nájdite obor pravdivosti výrokovej formy

$$|2x + 4| \leq |4 - 3x|$$

definovanej nad oborom reálnych čísel. Dokážte správnosť riešenia.

Príklad

Nájdite obor pravdivosti výrokovej formy

$$|2x+4| \leq |4-3x|$$

definovanej nad oborom reálnych čísel. Dokážte správnosť riešenia.

Návod

V dôkaze využite tieto vlastnosti absolútnej hodnoty reálnych čísel:

$$\forall x \forall y (y \leq |x| \leftrightarrow y \leq x \lor y \leq -x) \tag{1}$$

$$\forall x \forall y (|x| \leq y \leftrightarrow x \leq y \land -x \leq y). \tag{2}$$

Príklad

Nájdite obor pravdivosti výrokovej formy

$$|2x + 4| \leq |4 - 3x|$$

definovanej nad oborom reálnych čísel. Dokážte správnosť riešenia.

Návod

V dôkaze využite tieto vlastnosti absolútnej hodnoty reálnych čísel:

$$\forall x \forall y (y \leq |x| \leftrightarrow y \leq x \vee y \leq -x) \tag{1}$$

$$\forall x \forall y (|x| \leq y \leftrightarrow x \leq y \wedge -x \leq y). \tag{2}$$

Riešenie

Nech x je ľubovolné, ale pevne zvolené reálne číslo. Potom

$$|2x+4| \leq |4-3x| \overset{(1)}{\Leftrightarrow} |2x+4| \leq 4-3x \vee |2x+4| \leq 3x-4 \overset{(2)}{\Leftrightarrow}$$
$$2x+4 \leq 4-3x \wedge -2x-4 \leq 4-3x \vee$$
$$2x+4 \leq 3x-4 \wedge -2x-4 \leq 3x-4 \Leftrightarrow$$
$$5x \leq 0 \wedge x \leq 8 \vee 8 \leq x \wedge 0 \leq 5x \Leftrightarrow x \leq 0 \vee 8 \leq x.$$

Dokázali sme, že platí

$$\forall x(|2x+4| \leq |4-3x| \leftrightarrow x \leq 0 \vee 8 \leq x).$$

Obor pravdivosti výrokovej formy je preto rovný množine

$$\{x \in R \mid x \leq 0 \vee 8 \leq x\}.$$

Dôkaz implikácie

Tabuľka pravdivostných hodnôt

A	B	$A \to B$	$\neg B \to \neg A$	$A \wedge \neg B \to$ nepravda
pravda	pravda	pravda	pravda	pravda
pravda	nepravda	nepravda	nepravda	nepravda
nepravda	pravda	pravda	pravda	pravda
nepravda	nepravda	pravda	pravda	pravda

Dôkaz implikácie

Priamy dôkaz

Tabuľka pravdivostných hodnôt

A	B	$A \to B$
pravda	pravda	pravda
pravda	nepravda	nepravda
nepravda	pravda	pravda
nepravda	nepravda	pravda

Dôkaz implikácie

Priamy dôkaz

Definícia

Predikát deliteľnosti nad oborom prirodzených čísel

$$\forall x \forall y (x \mid y \leftrightarrow \exists z\, y = xz).$$

Príklad

Dokážte, že platí

$$\forall x \forall y \forall z (x \mid y \rightarrow x \mid yz).$$

Dôkaz

Nech x, y, z sú ľubovolné prirodzené čísla také, že $x \mid y$. Z definície plynie, že $y = xa$ pre nejaké prirodzené číslo a. Odtiaľ $yz = xaz$ a preto $yz = xb$ pre $b = az$. Z definície dostaneme, že $x \mid yz$.

Dôkaz implikácie

Nepriamy dôkaz

Tabuľka pravdivostných hodnôt

A	B	$A \to B$	$\neg B \to \neg A$
pravda	pravda	pravda	pravda
pravda	nepravda	nepravda	nepravda
nepravda	pravda	pravda	pravda
nepravda	nepravda	pravda	pravda

Dôkaz implikácie

Nepriamy dôkaz

$$\forall x (2 \nmid x \leftrightarrow \exists y \, x = 2y + 1). \tag{1}$$

Príklad

Dokážte, že platí

$$\forall x (2 \mid x^2 \rightarrow 2 \mid x).$$

Dôkaz

Tvrdenie dokážeme nepriamo. Nech x je ľubovolné prirodzené číslo také, že $2 \nmid x$. Podľa (1) $x = 2y + 1$ pre nejaké prirodzené číslo y. Odtiaľ

$$x^2 = (2y + 1)^2 = 4y^2 + 4y + 1 = 2(2y^2 + 2y) + 1$$

Zo vzťahu (1) okamžite plynie, že $2 \nmid x^2$.

Dôkaz implikácie

Ekvivalencia je obojstranná implikácia

Dôsledok

Platí

$$\forall x(2 \mid x^2 \leftrightarrow 2 \mid x).$$

Dôkaz

Je to dôsledok predchádzajúcich tvrdení a toho, že vždy platí

$$\forall x(2 \mid x^2 \leftrightarrow 2 \mid x) \leftrightarrow \forall x(2 \mid x^2 \rightarrow 2 \mid x) \wedge \forall x(2 \mid x \rightarrow 2 \mid x^2).$$

Dôkaz implikácie

Dôkaz sporom

Tabuľka pravdivostných hodnôt

A	B	$A \to B$	$A \wedge \neg B \to$ nepravda
pravda	pravda	pravda	pravda
pravda	nepravda	nepravda	nepravda
nepravda	pravda	pravda	pravda
nepravda	nepravda	pravda	pravda

Dôkaz implikácie

Dôkaz sporom

$$\forall x(2 \mid x^2 \leftrightarrow 2 \mid x) \tag{1}$$

Príklad

Dokážte, že $\sqrt{2}$ nie je racionálne číslo.

Dôkaz

Tvrdenie dokážeme sporom. Predpokladajme, že $\sqrt{2}$ je racionálne číslo. Potom sa dá vyjadriť v tvare $\frac{a}{b}$, kde a a b sú nesúdeliteľné nenulové prirodzené čísla. Postupnými úpravami dostaneme

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b} \Rightarrow 2 = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow 2b^2 = a^2 \Rightarrow 2 \mid a^2 \overset{(1)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow 2 \mid a \Rightarrow 4 \mid a^2 \Rightarrow 4 \mid 2b^2 \Rightarrow 2 \mid b^2 \overset{(1)}{\Rightarrow} 2 \mid b.$$

Čísla a a b sú deliteľné číslom 2. To je v spore s ich nesúdeliteľnosťou.

Dôkaz rozborom prípadov

Príklad

Predpokladajme, že nasledujúce tri tvrdenia

$$\forall x(A(x) \to B(x)) \to \exists x(A(x) \land B(x) \land \neg C(x)) \tag{1}$$

$$\forall x(A(x) \to B(x)) \lor \forall x(A(x) \to C(x)) \tag{2}$$

$$\forall x(A(x) \land C(x) \to B(x)) \tag{3}$$

platia nad neprázdnym oborom U. Dokážte, že platí

$$\exists x(A(x) \land B(x) \land \neg C(x)). \tag{4}$$

Dôkaz rozborom prípadov

Dôkaz

Rozlišujeme dva prípady, podľa toho či $\forall x(A(x) \to B(x))$ platí alebo nie.

- Ak $\forall x(A(x) \to B(x))$ neplatí, tak existuje prvok p, ktorý má vlastnosť A, ale nemá vlastnosť B. Navyše, z predpokladu (2) dostaneme, že platí $\forall x(A(x) \to C(x))$. Prvok p má tak tiež vlastnosť C. Z predpokladu (3) dostaneme, že prvok p musí mať vlastnosť B. Ale to je v spore s tým, že neplatí $B(p)$. Prípad, že $\forall x(A(x) \to B(x))$ neplatí, tak nemôže nastať.
- Musí preto nastať prípad, že $\forall x(A(x) \to B(x))$ platí. Potom tvrdenie (4) plynie priamo z predpokladu (1).

Dôkaz myslenou konštrukciou

Definícia

Predikát byť prvočíslom nad oborom prirodzených čísel:

$$\forall x\,(Pr(x) \leftrightarrow x > 1 \wedge \forall d(d \mid x \rightarrow d = 1 \vee d = x))\,.$$

Príklad

Dokážte, že platí

$$\forall n \exists x(x > n \wedge Pr(x)).$$

Návod

V dôkaze využite túto vlastnosť prirodzených čísel:

$$\forall x(x > 1 \rightarrow \exists p(Pr(p) \wedge p \mid x)). \tag{1}$$

Dôkaz myslenou konštrukciou

Dôkaz

Nech n je ľubovolné prirodzené číslo. Bez újmy na obecnosti môžeme predpokladať, že $n \geq 1$. Potom $n! + 1 > 1$. Podľa (1) existuje prvočíslo p, ktoré delí n!+1. Rozlišujeme dva prípady.

- Prípad $p \leq n$. Potom číslo p delí $n!$ a delĭ tak aj rozdiel $n! + 1 - n! = 1$. Ale číslo 1 nemá žiadne prvočíselné delitele. Prípad $p \leq n$ tak nemôže nastať.
- Musí nastať prípad $p > n$. Za hľadané číslo x teraz stačí zobrať prvočíslo p.

Záver

Organizácia predmetu

- Konzultácie
  - Dnes o 15.30, online.
  - V piatok o 12.00, m. I-16 alebo online.
- 2. domáca úloha:
  - Riešenie odovzdať do MOODLE do dnešného večera.
  - Riešenie v editore, nie rukopis.
- 1. semestrálny test:
  - V stredu 25. októbra o 18.10 v m. A a B.
  - Téma: kombinatorika.
  - Hodnotenie: 40 bodov.
  - Test trvá 90 minút čistého času.
  - Rozdelenie podľa abecedy:
    - Poslucháreň A: A – O.
    - Poslucháreň B: P – Z.
  - Nezabudnite si priniesť svoj ISIC preukaz.

Záver

Otázky

- Ak máte otázku, tak zdvihnite ruku.

Koniec prednášky