1-AIN-121 Diskrétna matematika (1)

Zimný semester 2023/24

5. prednáška

Ján Komara

Obsah prednášky

Matematické tvrdenia
- Úvod
- Motivačný príklad
- Základné pojmy z logiky

Príprava na 1. semestrálny test

Záver

Stručný úvod do logiky

- Zoznámime sa s jazykom logiky, ktorý sa používa pre zápis matematických tvrdení.
- Ako vypadá jazyk logiky? Je to vybraná časť prirodzeného jazyka obohateného o špeciálne symboly.
- Čo je to tvrdenie (výrok, formula)? Je to gramatická veta, o ktorej má zmysel uvažovať, či je pravdivá, alebo nie.
  - Ak je tvrdenie pravdivé, hovoríme tiež, že tvrdenie platí.
  - Ak je tvrdenie nepravdivé, hovoríme tiež, že tvrdenie neplatí.
- Zoznámime sa tiež so základnými technikami dôkazov, ktoré sa používajú v matematike.

Formulácia problému

Na tomto tvrdení sa zoznámime s jazykom logiky:

Prvočísel je nekonečne mnoho.

Zmysel tvrdenia

- Obrat „nekonečne mnoho" sa nazýva kvantifikátor.
- Prvočíslom rozumieme také prirodzené číslo, ktoré má práve dva delitele.
  - Príklady prvočísel: $2, 3, 5, 7, 11, 13, \ldots$.
  - Príklady čísel, ktoré nie sú prvočísla: $0, 1, 4, 6, 8, 9, 10, 12, \ldots$. Tie z nich, ktoré sú > 1, sa nazývajú zložené čísla.

Dôkaz tvrdenia

Je to pravdivé tvrdenie. Dokážeme ho sporom.
Predpokladajme, že prvočísel je konečne mnoho. Označme ich ako

$$p_1, p_2, \ldots, p_n. \tag{1}$$

Potom číslo

$$p_1 p_2 \cdots p_n + 1 > 1$$

je deliteľné niektorým z prvočísel (1). Tým istým prvočíslom je deliteľné aj číslo

$$p_1 p_2 \cdots p_n + 1 - p_1 p_2 \cdots p_n = 1.$$

To je ale spor, pretože číslo 1 nie je deliteľné žiadnym prvočíslom. Predpoklad, že prvočísel je konečne mnoho, je nesprávny. Platí tak pôvodné tvrdenie, že prvočísel je nekonečne mnoho.

Matematické tvrdenia

Motivačný príklad

Úloha

Na tomto tvrdení sa zoznámime s jazykom logiky:

Prvočísel je nekonečne mnoho.

Riešenie

Najprv ukážeme ako definovať v jazyku logiky tieto dve vlastnosti (predikáty) nad oborom prirodzených čísel $\mathbb{N}$:

- Binárny predikát deliteľnosti: „x delí y“.
- Unárny predikát „byť prvočíslom“.

Matematické tvrdenia

Motivačný príklad (predikát deliteľnosti)

Definícia (neformálny jazyk)

Prirodzené číslo x delí prirodzené číslo y, ak $y = xz$ pre nejaké prirodzené číslo z.

Definícia (formálny jazyk)

Pre každé prirodzené číslo x a každé prirodzené číslo y: x delí y práve vtedy, keď existuje prirodzené číslo z také, že $y = xz$.

Notácia

$x \mid y$ je skratka za „x delí y“.

Definícia (formálny jazyk)

Pre každé prirodzené číslo x a každé prirodzené číslo y: $x \mid y$ práve vtedy, keď existuje prirodzené číslo z také, že $y = xz$.

Matematické tvrdenia

Motivačný príklad (predikát deliteľnosti)

Notácia (ekvivalencia)

$A \leftrightarrow B$ je skratka za „A práve vtedy, keď B“.

Definícia (formálny jazyk)

Pre každé prirodzené číslo x a každé prirodzené číslo y: $x \mid y \leftrightarrow$ existuje prirodzené číslo z také, že $y = xz$.

Notácia (existenčný kvantifikátor)

$\exists z \in \mathrm{N}$ je skratka za „existuje prirodzené číslo z“.

Definícia (formálny jazyk)

Pre každé prirodzené číslo x a každé prirodzené číslo y:
$x \mid y \leftrightarrow \exists z \in \mathrm{N}\, y = xz$.

Matematické tvrdenia

Motivačný príklad (predikát deliteľnosti)

Notácia (všeobecný kvantifikátor)

- $\forall x \in \mathrm{N}$ je skratka za „pre každé prirodzené číslo x“.
- $\forall y \in \mathrm{N}$ je skratka za „pre každé prirodzené číslo y“.

Definícia (formálny jazyk)

$$\forall x \in \mathrm{N} \forall y \in \mathrm{N} : x \mid y \leftrightarrow \exists z \in \mathrm{N}\ y = xz.$$

Notácia

Zátvorky namiesto dvojbodky.

Definícia (formálny jazyk)

$$\forall x \in \mathrm{N} \forall y \in \mathrm{N} (x \mid y \leftrightarrow \exists z \in \mathrm{N}\ y = xz).$$

Matematické tvrdenia

Motivačný príklad (predikát deliteľnosti)

Notácia

- $\forall x$ je skratka za $\forall x \in \mathrm{N}$.
- $\forall y$ je skratka za $\forall y \in \mathrm{N}$.
- $\exists z$ je skratka za $\exists z \in \mathrm{N}$.

Definícia (formálny jazyk)

$$\forall x \forall y (x \mid y \leftrightarrow \exists z \, y = xz).$$

Matematické tvrdenia

Motivačný príklad (predikát byť prvočíslom)

Definícia (neformálny jazyk)

Prirodzené číslo x je prvočíslom, ak má práve dva delitele.

Definícia (neformálny jazyk)

Prirodzené číslo x je prvočíslom, ak je väčšie ako 1 a má len triviálne delitele.

Definícia (formálny jazyk)

Pre každé prirodzené číslo x: x je prvočíslom práve vtedy, keď $x > 1$ a zároveň pre každé prirodzené číslo d: ak $d \mid x$, potom $d = 1$ alebo $d = x$.

Notácia

$Pr(x)$ je skratka za „x je prvočíslom“.

Matematické tvrdenia

Motivačný príklad (predikát byť prvočíslom)

Definícia (formálny jazyk)

Pre každé prirodzené číslo x: $Pr(x)$ práve vtedy, keď $x > 1$ a zároveň pre každé prirodzené číslo d: ak $d \mid x$, potom $d = 1$ alebo $d = x$.

Definícia (formálny jazyk)

Pre každé prirodzené číslo x: $Pr(x) \leftrightarrow x > 1$ a zároveň pre každé prirodzené číslo d: ak $d \mid x$, potom $d = 1$ alebo $d = x$.

Notácia (konjunkcia)

$A \wedge B$ je skratka za "A a zároveň B".

Definícia (formálny jazyk)

Pre každé prirodzené číslo x: $Pr(x) \leftrightarrow x > 1 \wedge$ pre každé prirodzené číslo d: ak $d \mid x$, potom $d = 1$ alebo $d = x$.

Matematické tvrdenia

Motivačný príklad (predikát byť prvočíslom)

Notácia (disjunkcia)

$A \vee B$ je skratka za „A alebo B“.

Definícia (formálny jazyk)

Pre každé prirodzené číslo x: $Pr(x) \leftrightarrow x > 1 \wedge$ pre každé prirodzené číslo d: ak $d \mid x$, potom $d = 1 \vee d = x$.

Notácia (implikácia)

$A \rightarrow B$ je skratka za „ak A, potom B“.

Definícia (formálny jazyk)

Pre každé prirodzené číslo x: $Pr(x) \leftrightarrow x > 1 \wedge$ pre každé prirodzené číslo d: $d \mid x \rightarrow d = 1 \vee d = x$.

Matematické tvrdenia

Motivačný príklad (predikát byť prvočíslom)

Definícia (formálny jazyk)

$$\forall x \in \mathrm{N} : Pr(x) \leftrightarrow x > 1 \land \forall d \in \mathrm{N} : d \mid x \to d = 1 \lor d = x.$$

Definícia (formálny jazyk)

$$\forall x \in \mathrm{N}(Pr(x) \leftrightarrow x > 1 \land \forall d \in \mathrm{N}(d \mid x \to d = 1 \lor d = x)).$$

Definícia (formálny jazyk)

$$\forall x(Pr(x) \leftrightarrow x > 1 \land \forall d(d \mid x \to d = 1 \lor d = x)).$$

Matematické tvrdenia

Motivačný príklad

Veta (neformálny jazyk)

Prvočísel je nekonečne mnoho.

Veta (neformálny jazyk)

Množina prvočísel je zhora neohraničená.

Veta (formálny jazyk)

Ku každému prirodzenému číslu n existuje prirodzené číslo x také, že x je väčšie ako n a zároveň x je prvočíslo.

Veta (formálny jazyk)

$$\forall n \exists x (x > n \wedge Pr(x)).$$

Matematické tvrdenia

Motivačný príklad

Definícia (neformálny jazyk)

Prirodzené číslo x delí prirodzené číslo y, ak $y = xz$ pre nejaké prirodzené číslo z.

Definícia (neformálny jazyk)

Prirodzené číslo x je prvočíslom, ak má práve dva delitele.

Veta (neformálny jazyk)

Prvočísel je nekonečne mnoho.

Matematické tvrdenia

Motivačný príklad

Definícia (formálny jazyk)

$$\forall x \forall y (x \mid y \leftrightarrow \exists z\, y = xz).$$

Definícia (formálny jazyk)

$$\forall x (Pr(x) \leftrightarrow x > 1 \wedge \forall d (d \mid x \rightarrow d = 1 \vee d = x)).$$

Veta (formálny jazyk)

$$\forall n \exists x (x > n \wedge Pr(x)).$$

Výrokovologické spojky

- Negácia $\neg$ vo výroku $\neg A$. Čítaj „nie A“.
- Konjunkcia $\wedge$ vo výroku $A \wedge B$. Čítaj „A a (zároveň) B“.
- Disjunkcia $\vee$ vo výroku $A \vee B$. Čítaj „A alebo B“; „platí aspoň jedno z tvrdení A a B“.
- Implikácia $\rightarrow$ vo výroku $A \rightarrow B$. Čítaj „ak A, potom B“; „ak A, tak aj B“; „A implikuje B“; „z A vyplýva B“.
- Ekvivalencia (obojstranná implikácia) $\leftrightarrow$ vo výroku $A \leftrightarrow B$. Čítaj „A práve vtedy, keď B“.

Kvantifikátory

- Všeobecný (univerzálny, veľký) kvantifikátor $\forall x$ vo výroku $\forall x A$. Čítaj „pre každé x platí A“; „o každom x platí A“.

- Existenčný (malý) kvantifikátor $\exists x$ vo výroku $\exists x A$. Čítaj „existuje (aspoň jedno) x také, že platí A“.

Syntaktické konvencie

- Najvyššiu prioritu majú kvantifikátory.
- Priorita výrokovologických spojok od najvyššej po najnižšiu: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$.
- Výrokovologická spojka $\leftrightarrow$ má tú istú prioritu ako $\rightarrow$.
- Binárne výrokovologické spojky sú asociované doprava.

Príklad

$$A \rightarrow B \leftrightarrow \neg C \vee D \wedge \forall x E$$

$$(A \rightarrow (B \leftrightarrow ((\neg C) \vee (D \wedge (\forall x E)))))$$

Ďalšie príklady

- $A \wedge B \vee C \equiv (A \wedge B) \vee C$
- $A \wedge B \to C \equiv (A \wedge B) \to C$ a $A \vee B \to C \equiv (A \vee B) \to C$
- $A \to B \wedge C \equiv A \to (B \wedge C)$ a $A \to B \vee C \equiv A \to (B \vee C)$
- $A \wedge B \wedge C \equiv A \wedge (B \wedge C)$ a $A \vee B \vee C \equiv A \vee (B \vee C)$
- $A \to B \to C \equiv A \to (B \to C)$ a
  $A \leftrightarrow B \leftrightarrow C \equiv A \leftrightarrow (B \leftrightarrow C)$
- $A \to B \leftrightarrow C \equiv A \to (B \leftrightarrow C)$
- $A \wedge B \to C \leftrightarrow D \equiv (A \wedge B) \to (C \leftrightarrow D)$

Tabuľka pravdivostných hodnôt

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \rightarrow B$	$A \leftrightarrow B$
pravda	pravda	pravda	pravda	pravda	pravda
pravda	nepravda	nepravda	pravda	nepravda	nepravda
nepravda	pravda	nepravda	pravda	pravda	nepravda
nepravda	nepravda	nepravda	nepravda	pravda	pravda

Definícia

Tautológiou rozumieme také tvrdenie, ktoré je vždy pravdivé na základe svojej výrokovologickej štruktúry.

Príklady tautológií

$$A \wedge B \wedge C \leftrightarrow (A \wedge B) \wedge C$$

$$A \wedge B \leftrightarrow B \wedge A$$

$$(A \rightarrow B) \leftrightarrow \neg A \vee B$$

$$(A \rightarrow B) \leftrightarrow \neg B \rightarrow \neg A$$

$$(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A).$$

Definícia

Logickým platným tvrdením rozumieme také tvrdenie, ktoré je vždy pravdivé na základe svojej výrokovologickej a kvantifikátorovej štruktúry.

Príklady logických platných tvrdení

$$\neg\exists x A \leftrightarrow \forall x \neg A$$

$$\neg\forall x A \leftrightarrow \exists x \neg A$$

$$\forall x(A \rightarrow B) \leftrightarrow \forall x(\neg B \rightarrow \neg A)$$

$$\forall x(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow \forall x(A \rightarrow B) \wedge \forall x(B \rightarrow A)$$

Problém dvojitého záporu v slovenčine

Ilustrovaného na tvrdení „Nikto nie je doma“.

Príprava na 1. semestrálny test

1. semestrálny test

- V stredu 25. októbra o 18.10 v m. A a B.
- Téma: kombinatorika.
- Hodnotenie: 40 bodov.

Príprava na 1. semestrálny test

Záver

Organizácia predmetu

- 1. domáca úloha.
  - Opravovanie zatiaľ neskončilo.
  - O jeho skončení budete informovaní.
  - Až potom môžete reklamovať hodnotenie u svojho cvičiaceho.
- Konzultácie
  - Dnes o 14.30, m. I-16.
  - V piatok o 12.00, m. I-16 alebo online.
- 2. domáca úloha.
  - Zadanie nájdete na webe predmetu.
  - Riešenie odovzdať do MOODLE najneskôr v pondelok 23. októbra.

Záver

Otázky

- Ak máte otázku, tak zdvihnite ruku.

Koniec prednášky