1-AIN-121 Diskrétna matematika (1)

Zimný semester 2023/24

4. prednáška

Ján Komara

Obsah prednášky

Zopakovanie

Sumačná notácia

Nech $a_m, a_{m+1}, \ldots, a_i, \ldots, a_n$ je konečná postupnosť čísel.
Symbolom $\sum_{i=m}^{n} a_i$ označujeme súčet definovaný predpisom

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = \begin{cases} a_m + a_{m+1} + \cdots + a_i + \cdots + a_n & \text{ak } m \leq n, \\ 0 & \text{ak } m > n. \end{cases}$$

Alternatívna notácia

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{i \in \{m, \ldots, n\}} a_i = \sum_{m \leq i \leq n} a_i$$

Zopakovanie

Binomická veta

Nech n je prirodzené číslo. Potom pre ľubovolné čísla x a y platí

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

Dôsledok

Pre každé prirodzené číslo n platí

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0^n = \begin{cases} 1 & \text{ak } n = 0, \\ 0 & \text{ak } n > 0. \end{cases}$$

Zopakovanie

Pravidlo súčtu

Ak A a B sú disjunktné konečné množiny ($A \cap B = \emptyset$), potom

$$|A \cup B| = |A| + |B|.$$

Komplement množiny

Nech A je podmnožina množiny U. Komplement množiny A v množine U je definovaný predpisom

$$\overline{A} = \{x \in U \mid x \notin A\}.$$

Kombinatorické pravidlo komplementu

Nech A je podmnožina konečnej množiny U. Potom platí

$$|U| = |A| + \left|\overline{A}\right| \qquad |A| = |U| - \left|\overline{A}\right| \qquad \left|\overline{A}\right| = |U| - |A|.$$

Zopakovanie

Komplement je involutívna množinová operácia

Nech A je podmnožina množiny U. Potom platí

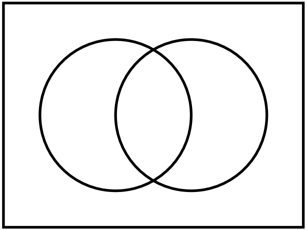
$$\overline{\overline{A}} = A.$$

De Morganove zákony

Nech A a B sú podmnožiny konečnej množiny U. Potom platí

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \qquad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

Dôkaz



Zopakovanie

Jedno kombinatorické počítanie

Nech A je podmnožina konečnej množiny U. Potom platí

$$|A| = \sum_{x \in A} 1 + \sum_{x \in \overline{A}} 0.$$

Túto vlastnosť budeme často čítať takto:

- Prvok $x \in U$ prispieva k číslu $|A|$ jednotkou, ak $x \in A$.
- Prvok $x \in U$ prispieva k číslu $|A|$ nulou, ak $x \notin A$.

Zopakovanie

Príklad

Nech $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ je základné univerzum. Platí

$$|\{1, 2, 4, 5\}| = |\{1, 2, 4\}| + |\{2, 4, 5\}| - |\{2, 4\}|\,.$$

Ukážeme, že každý prvok množiny U prispieva rovnako k ľavej a pravej strane rovnosti:

- $1 \in U$:
- $2 \in U$:
- $3 \in U$:
- $4 \in U$:
- $5 \in U$:

Dôsledok: identita platí.

Princíp zapojenia a vypojenia

Prípad $n = 2$

Veta

Ak A a B sú podmnožiny konečnej množiny U, potom

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| .$$

Pretože $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$, platí tiež

$$\left|\overline{A} \cap \overline{B}\right| = |U| - (|A| + |B|) + |A \cap B| .$$

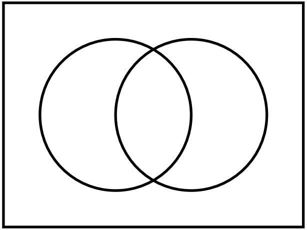
Princíp zapojenia a vypojenia

Prípad $n = 2$

Kombinatorický dôkaz

Každý prvok z U prispieva rovnako k ľavej a pravej strane rovnosti:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| .$$



Princíp zapojenia a vypojenia

Prípad $n = 2$

Príklad (zopakovanie)

Koľko celočíselných riešení má rovnica

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 9,$$

ak vyžadujeme, aby platilo

$$0 \leq x_1 \quad 0 \leq x_2 \quad 0 \leq x_3 \quad 0 \leq x_4.$$

Riešenie

Príklad (zopakovanie)

Koľko celočíselných riešení má rovnica

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 9,$$

ak vyžadujeme, aby platilo

$$0 \leq x_1 \leq 1 \quad 0 \leq x_2 \quad 0 \leq x_3 \quad 0 \leq x_4.$$

Riešenie

Princíp zapojenia a vypojenia

Prípad $n = 2$

Príklad

Koľko celočíselných riešení má rovnica

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 9,$$

ak vyžadujeme, aby platilo

$$0 \leq x_1 \leq 1 \quad 0 \leq x_2 \leq 2 \quad 0 \leq x_3 \quad 0 \leq x_4.$$

Riešenie

Použijeme princíp zapojenia a vypojenia:

$$\left|\overline{A} \cap \overline{B}\right| = |U| - (|A| + |B|) + |A \cap B| \,.$$

Princíp zapojenia a vypojenia

Prípad $n = 3$

Veta

Ak A, B a C sú podmnožiny konečne množiny U, potom

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - \\ (|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|) + |A \cap B \cap C| \,.$$

Pretože $\overline{A \cup B \cup C} = \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$, platí tiež

$$\left|\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}\right| = |U| - (|A| + |B| + |C|) + \\ (|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|) - |A \cap B \cap C| \,.$$

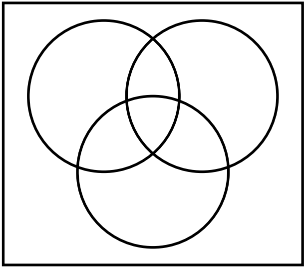
Princíp zapojenia a vypojenia

Prípad $n = 3$

Kombinatorický dôkaz

Každý prvok z U prispieva rovnako k ľavej a pravej strane rovnosti:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - (|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|) + |A \cap B \cap C| .$$



Príklad

Koľko celočíselných riešení má rovnica

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 9,$$

ak vyžadujeme, aby platilo

$$0 \leq x_1 \leq 1 \quad 0 \leq x_2 \leq 2 \quad 0 \leq x_3 \leq 3 \quad 0 \leq x_4.$$

Riešenie

Použijeme princíp zapojenia a vypojenia:

$$\left|\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}\right| = |U| - (|A| + |B| + |C|) + \\ (|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|) - |A \cap B \cap C|.$$

Princíp zapojenia a vypojenia

Obecný prípad

Veta

Nech $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sú podmnožiny konečnej množiny U. Potom

$$
\begin{aligned}
&|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = \\
&(|A_1| + |A_2| + \cdots + |A_i| + \cdots + |A_n|) - \\
&(|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + \cdots + |A_i \cap A_j| + \cdots) + \\
&(|A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + \cdots + |A_i \cap A_j \cap A_k| + \cdots) - \\
&\ldots \\
&(-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n| .
\end{aligned}
$$

Princíp zapojenia a vypojenia

Obecný prípad

Veta

Nech $A_1, A_2, \dots, A_n$ sú podmnožiny konečnej množiny U. Potom

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n| .$$

$$\left|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_n}\right| = |U| - \sum_{i=1}^{n} |A_i| + \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| - \sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \cdots + (-1)^{n} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n| .$$

Princíp zapojenia a vypojenia

Obecný prípad

Veta

Nech $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sú podmnožiny konečnej množiny U. Potom

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}|$$

$$\left|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_n}\right| = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}| \,.$$

Kombinatorický dôkaz

Každý prvok z U prispieva rovnako k ľavej a pravej strane rovnosti:

$$\left|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_n}\right| =$$

$$|U| - \sum_{i=1}^{n} |A_i| + \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| - \sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \cdots .$$

Príklad

Koľko celočíselných riešení má rovnica

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 9,$$

ak vyžadujeme, aby platilo

$$0 \leq x_1 \leq 1 \quad 0 \leq x_2 \leq 2 \quad 0 \leq x_3 \leq 3 \quad 0 \leq x_4 \leq 4.$$

Riešenie

Princíp zapojenia a vypojenia

Špeciálny prípad

Veta

Nech $A_1, A_2, \dots, A_n$ sú podmnožiny konečnej množiny U. Nech množiny

$$A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}$$

majú rovnako veľa prvkov pre ľubovolný výber k čísel

$$1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n.$$

Potom

$$\left|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_n}\right| = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \left|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k\right|.$$

Princíp zapojenia a vypojenia

Špeciálny prípad

Dôkaz

Postupnými úpravami dostaneme

$$\left|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_n}\right| =$$

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}| =$$

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k| =$$

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k| .$$

Princíp zapojenia a vypojenia

Špeciálny prípad

Problém šatniarky

Sedem pánov navštívi divadelné predstavenie a všetci si odložia svoje klobúky v šatni. Koľkými spôsobmi im môže roztržitá šatniarka vydať klobúky späť tak, aby žiaden pán nedostal svoj vlastný klobúk?

Riešenie problému šatniarky

Počítame počet permutácií 7-prvkovej množiny, ktoré nenechajú žiadne číslo na svojom mieste.

1 2 3 4 5 6 7

1 2 3 4 5 6 7

Riešenie problému šatniarky

Počet permutácií 7-prvkovej množiny, ktoré nenechajú žiadne číslo na svojom mieste, je rovný číslu

$$\begin{aligned} D_7 &= 7! - 7\cdot 6! + \binom{7}{2}5! - \binom{7}{3}4! + \binom{7}{4}3! - \binom{7}{5}2! + \binom{7}{6} - 1 \\ &= \binom{7}{0}7! - \binom{7}{1}6! + \binom{7}{2}5! - \binom{7}{3}4! + \\ &\qquad + \binom{7}{4}3! - \binom{7}{5}2! + \binom{7}{6}1! - \binom{7}{0}0! \\ &= \sum_{k=0}^{7}(-1)^k\binom{7}{k}(7-k)! = 1\,854. \end{aligned}$$

Táto časť permutácií nenechá žiadne číslo na svojom mieste:

$$\frac{1\,854}{7!} = \frac{1\,854}{5\,040} \approx 0{,}37 = 37\%$$

Princíp zapojenia a vypojenia

Špeciálny prípad

Veta

Počet permutácií n-prvkovej množiny, ktoré nenechajú žiadne číslo na svojom mieste, je rovný číslu

$$
\begin{aligned}
D_n &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)! \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{n!}{k!(n-k)!} (n-k)! = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \\
&\approx n! \cdot \frac{1}{\mathrm{e}} = \frac{n!}{2{,}718\,281\ldots} = n! \cdot 0{,}367\,879\ldots.
\end{aligned}
$$

Číslo $e = 2{,}718\,281\ldots$ sa nazýva Eulerove číslo.

Záver

Cvičenie a kurz

- Princíp zapojenia a vypojenia.

Organizácia predmetu

- Konzultácie
  - Dnes o 14.30, m. I-16.
  - V piatok o 12.00, online.
- 1. domáca úloha
  - Riešenie odovzdať do MOODLE do dnešného večera.
  - Riešenie v editore, nie rukopis. Výnimka: 1. príklad (pozri slajdy z 1. prednášky).
  - Program nie je riešením!
  - Pracujte samostatne! Riešenia vzorových príkladov sú ovšem voľne k dispozícii.
- 1. semestrálny test.
  - V stredu 25. októbra o 18.10 v m. A a B.
  - Téma: kombinatorika.
  - Hodnotenie: 40 bodov.

Záver

Otázky

- Ak máte otázku, tak zdvihnite ruku.

Koniec prednášky