1-AIN-121 Diskrétna matematika (1)

Zimný semester 2023/24

3. prednáška

Ján Komara

Obsah prednášky

Zopakovanie

Pravidlo bijekcie

Pre ľubovolné dve konečné množiny A a B platí rovnosť $|A| = |B|$ práve vtedy, keď existuje medzi nimi bijekcia.

Kombinačné čísla

Základné vlastnosti

Definícia

Kombinačné číslo $\binom{n}{k}$ (čítaj *n nad k*) je definované vzťahom

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}.$$

Platí $\binom{n}{1} = n$ a $\binom{n}{0} = 1$.

Kombinatorická interpretácia kombinačných čísel

Pre každé dve prirodzené čísla n a k platí

$$\binom{n}{k} = \mathrm{C}(n, k).$$

Tu $\mathrm{C}(n, k)$ označuje počet kombinácií k-tej triedy z n prvkov.

Kombinačné čísla

Základné vlastnosti

Alternatívna definícia kombinačných čísel

Pre každé dve prirodzené čísla n a k platí

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \dfrac{n!}{k!(n-k)!} & \text{ak } k \leq n, \\ 0 & \text{ak } k > n. \end{cases}$$

Kombinatorika dôkaz

Metódou dvojitého počítania sa dokáže prípad $k \leq n$:

$$\binom{n}{k} k!(n-k)! = n!.$$

Ak $k > n$, potom tvrdenie plynie z rovnosti $\mathrm{C}(n, k) = 0$.

Kombinačné čísla

Základné vlastnosti

Konvencia

V tvrdeniach, ktoré obsahujú výrazy typu $\binom{n}{n-k}$, budeme často mlčky predpokladať, že $n \geq k$.

Veta

Platí

$$\binom{n}{0} = 1 = \binom{n}{n}$$
$$\binom{n}{1} = n = \binom{n}{n-1}$$
$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} = \binom{n}{n-2}.$$

Kombinačné čísla
Základné vlastnosti

Kombinatorický dôkaz

Kombinačné čísla

Základné vlastnosti

Veta

Pre každé dve prirodzené čísla n a $k \leq n$ platí

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Kombinatorický dôkaz

Zobrazenie

$$A \mapsto \overline{A}$$

je bijekciou medzi k-prvkovými a $(n-k)$-prvkovými podmnožinami n-prvkovej množiny. Tvrdenie vety plynie z bijektívneho princípu.

Poznámka

Ilustrujeme to pre prípad $n = 5$, $k = 2$ a $n - k = 3$. Nech U je základná množina s 5-timi prvkami:

$$U = \{1, 2, 3, 4, 5\}.$$

Pascalova formula

Pre každé dve prirodzené čísla $n \geq 1$ a $k \geq 1$ platí

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

Kombinatorický dôkaz

Dôkaz tvrdenia ilustrujeme pre prípad $n = 5$ a $k = 3$:

$$\binom{5}{3} = \binom{4}{2} + \binom{4}{3}.$$

Kombinačné čísla

Základné vlastnosti

Nech U je základná množina s 5-timi prvkami:

$$U = \{1, 2, 3, 4, 5\}.$$

Platí:

- Počet 3-prvkových podmnožín množiny U je rovný číslu $\binom{5}{3}$.
- Počet 3-prvkových podmnožín množiny U, ktoré obsahujú číslo 5, je rovný číslu $\binom{4}{2}$.
- Počet 3-prvkových podmnožín množiny U, ktoré neobsahujú číslo 5, je rovný číslu $\binom{4}{3}$.

Tvrdenie potom plynie zo sčítavacieho princípu.

Tabuľka hodnôt kombinačných čísel

Vychádzame z týchto vlastností:

$$\binom{n}{k} = 0 \qquad \text{ak } k > n$$

$$\binom{n}{0} = 1 = \binom{n}{n}$$

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}.$$

Kombinačné čísla

Pascalov trojuholník

$$\begin{matrix}
\binom{0}{0} & \binom{0}{1} & \binom{0}{2} & \binom{0}{3} & \binom{0}{4} & \binom{0}{5} \\
\binom{1}{0} & \binom{1}{1} & \binom{1}{2} & \binom{1}{3} & \binom{1}{4} & \binom{1}{5} \\
\binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & \binom{2}{3} & \binom{2}{4} & \binom{2}{5} \\
\binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & \binom{3}{4} & \binom{3}{5} \\
\binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} & \binom{4}{5} \\
\binom{5}{0} & \binom{5}{1} & \binom{5}{2} & \binom{5}{3} & \binom{5}{4} & \binom{5}{5}
\end{matrix}$$

Tabuľka hodnôt kombinačných čísel

Vychádzame z týchto vlastností:

$$\binom{n}{k} = 0 \qquad \text{ak } k > n$$

$$\binom{n}{0} = 1 = \binom{n}{n}$$

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}.$$

Kombinačné čísla

Pascalov trojuholník

$$
\begin{array}{cccccc}
\binom{0}{0} & & & & & \\
\binom{1}{0} & \binom{1}{1} & & & & \\
\binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & & & \\
\binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & & \\
\binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} & \\
\binom{5}{0} & \binom{5}{1} & \binom{5}{2} & \binom{5}{3} & \binom{5}{4} & \binom{5}{5}
\end{array}
$$

Tabuľka hodnôt kombinačných čísel

Vychádzame z týchto vlastností:

$$\binom{n}{k} = 0 \qquad \text{ak } k > n$$

$$\binom{n}{0} = 1 = \binom{n}{n}$$

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}.$$

Kombinačné čísla

Pascalov trojuholník

$$\binom{0}{0}$$

$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$

$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$

$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$

$$\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4}$$

$$\binom{5}{0} \quad \binom{5}{1} \quad \binom{5}{2} \quad \binom{5}{3} \quad \binom{5}{4} \quad \binom{5}{5}$$

Kombinačné čísla

Pascalov trojuholník

$$\binom{0}{0}$$

$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$

$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$

$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$

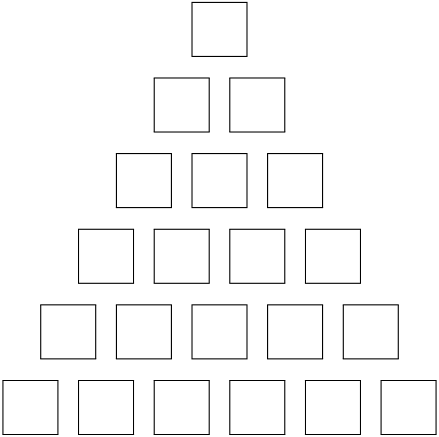
$$\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4}$$

$$\binom{5}{0} \quad \binom{5}{1} \quad \binom{5}{2} \quad \binom{5}{3} \quad \binom{5}{4} \quad \binom{5}{5}$$

$$\binom{n}{0} = 1 = \binom{n}{n} \qquad \binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$

Kombinačné čísla

Pascalov trojuholník



Kombinačné čísla

Pascalov trojuholník

$$\binom{0}{0}$$

$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$

$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$

$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$

$$\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4}$$

$$\binom{5}{0} \quad \binom{5}{1} \quad \binom{5}{2} \quad \binom{5}{3} \quad \binom{5}{4} \quad \binom{5}{5}$$

$$\binom{n}{0} = 1 = \binom{n}{n} \qquad \binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$

Kombinačné čísla

Pascalov trojuholník

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & \square & & 1 & & & \\
 & & 1 & & \square & & \square & & 1 & & \\
 & 1 & & \square & & \square & & \square & & 1 & \\
1 & & \square & & \square & & \square & & \square & & 1
\end{array}
$$

Kombinačné čísla

Pascalov trojuholník

$$\binom{0}{0}$$

$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$

$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$

$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$

$$\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4}$$

$$\binom{5}{0} \quad \binom{5}{1} \quad \binom{5}{2} \quad \binom{5}{3} \quad \binom{5}{4} \quad \binom{5}{5}$$

$$\binom{n}{0} = 1 = \binom{n}{n} \qquad \binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$

Kombinačné čísla

Pascalov trojuholník

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & \boxed{} & & \boxed{} & & 1 & & & \\
 & & 1 & & \boxed{} & & \boxed{} & & \boxed{} & & 1 & & \\
 & 1 & & \boxed{} & & \boxed{} & & \boxed{} & & \boxed{} & & 1 &
\end{array}
$$

Kombinačné čísla

Pascalov trojuholník

$$\binom{0}{0}$$

$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$

$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$

$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$

$$\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4}$$

$$\binom{5}{0} \quad \binom{5}{1} \quad \binom{5}{2} \quad \binom{5}{3} \quad \binom{5}{4} \quad \binom{5}{5}$$

$$\binom{n}{0} = 1 = \binom{n}{n} \qquad \binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$

Kombinačné čísla

Pascalov trojuholník

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & \square & & \square & & \square & & 1 & & \\
 & 1 & & \square & & \square & & \square & & \square & & 1 &
\end{array}
$$

Kombinačné čísla

Pascalov trojuholník

$$\binom{0}{0}$$

$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$

$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$

$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$

$$\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4}$$

$$\binom{5}{0} \quad \binom{5}{1} \quad \binom{5}{2} \quad \binom{5}{3} \quad \binom{5}{4} \quad \binom{5}{5}$$

$$\binom{n}{0} = 1 = \binom{n}{n} \qquad \binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$

Kombinačné čísla

Pascalov trojuholník

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & \square & & \square & & \square & & \square & & 1
\end{array}
$$

Kombinačné čísla

Pascalov trojuholník

$$\binom{0}{0}$$

$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$

$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$

$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$

$$\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4}$$

$$\binom{5}{0} \quad \binom{5}{1} \quad \binom{5}{2} \quad \binom{5}{3} \quad \binom{5}{4} \quad \binom{5}{5}$$

$$\binom{n}{0} = 1 = \binom{n}{n} \qquad \binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$

Kombinačné čísla

Pascalov trojuholník

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}
$$

Kombinačné čísla

Počet všetkých podmnožín

Úloha

Určiť počet podmnožín n-prvkovej množiny.

Kombinačné čísla

Počet všetkých podmnožín

$$\binom{0}{0}$$

$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$

$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$

$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$

$$\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4}$$

$$\binom{5}{0} \quad \binom{5}{1} \quad \binom{5}{2} \quad \binom{5}{3} \quad \binom{5}{4} \quad \binom{5}{5}$$

Kombinačné čísla

Počet všetkých podmnožín

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}
$$

Veta

Počet podmnožín n-prvkovej množiny je rovný číslu 2^n.

Kombinatorický dôkaz

Zostrojime bijekciu medzi systémom všetkých podmnožín n-prvkovej množiny a n-bitovým slovami. Pretože tých druhých je 2^n, tak tvrdenie vety potom plynie z bijektívneho princípu.

Kombinačné čísla

Počet všetkých podmnožín

Konštrukciu bijekcie ilustrujeme pre prípad $n = 5$. Nech U je základná množina s 5-timi prvkami:

$$U = \{1, 2, 3, 4, 5\}.$$

Veta

Počet podmnožín n-prvkovej množiny je rovný číslu 2^n.

Veta (alternatívna formulácia)

Pre každé prirodzené číslo n platí

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n.$$

Veta (jedno vylepšenie)

Pre každé prirodzené číslo n platí

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{k} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n.$$

Kombinačné čísla

Počet všetkých podmnožín

Veta (pomocou sumačnej notácie)

Pre každé prirodzené číslo n platí

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

Terminológia

- symbol $\sum$ je sumačný znak,
- premenná k je index,
- číslo 0 je dolná hranica,
- číslo n je horná hranica.

Úloha

Určiť počet podmnožín n-prvkovej množiny, ktoré majú párny resp. nepárny počet prvkov.

Kombinačné čísla

Podmnožiny s párnym a nepárnym počtom prvkov

$$\binom{0}{0}$$

$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$

$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$

$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$

$$\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4}$$

$$\binom{5}{0} \quad \binom{5}{1} \quad \binom{5}{2} \quad \binom{5}{3} \quad \binom{5}{4} \quad \binom{5}{5}$$

Kombinačné čísla

Počet všetkých podmnožín

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}
$$

Kombinačné čísla

Podmnožiny s párnym a nepárnym počtom prvkov

Veta

Nech $n \geq 1$. Počet podmnožín n-prvkovej množiny s párnym počtom prvkov je rovný počtu podmnožín tej istej množiny s nepárnym počtom prvkov.

Dôsledok

Nech $n \geq 1$. Počet podmnožín n-prvkovej množiny s párnym resp. nepárnym počtom prvkov je rovný číslu 2^{n-1}.

Kombinatorický dôkaz

Zostrojime bijekciu medzi systémami všetkých podmnožín n-prvkovej množiny s párnym a nepárnym počtom prvkov. Tvrdenie vety potom plynie z bijektívneho princípu.

Kombinačné čísla

Podmnožiny s párnym a nepárnym počtom prvkov

Konštrukciu bijekcie ilustrujeme pre prípad $n = 4$. Nech U je základná množina s 4-mi prvkami:

$$U = \{1, 2, 3, 4\}.$$

Kombinačné čísla

Podmnožiny s párnym a nepárnym počtom prvkov

Úloha

Ako vyjadriť pomocou sumačnej notácie ten fakt, že počet podmnožín n-prvkovej množiny s párnym resp. nepárnym počtom prvkov je ten istý pre $n \geq 1$.

Riešenie

Postupnými ekvivalentnými úpravami dostaneme

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \cdots$$

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \binom{n}{4} - \binom{n}{5} + \cdots = 0$$

Kombinačné čísla

Podmnožiny s párnym a nepárnym počtom prvkov

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \binom{n}{4} - \binom{n}{5} + \cdots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0$$

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \cdots + (-1)^k \binom{n}{k} + \cdots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0$$

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$$

Kombinačné čísla

Podmnožiny s párnym a nepárnym počtom prvkov

Veta

Pre každé prirodzené číslo $n \geq 1$ platí

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^n \binom{n}{k} = 0.$$

Veta

Pre každé prirodzené číslo n platí

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^n \binom{n}{k} = 0^n.$$

Sumačná notácia

Definícia

Nech $a_m, a_{m+1}, \ldots, a_i, \ldots, a_n$ je konečná postupnosť čísel.
Symbolom $\sum_{i=m}^{n} a_i$ označujeme súčet definovaný predpisom

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = \begin{cases} a_m + a_{m+1} + \cdots + a_i + \cdots + a_n & \text{ak } m \leq n, \\ 0 & \text{ak } m > n. \end{cases}$$

Terminológia

- symbol $\sum$ je sumačný znak,
- premenná i je index,
- číslo m je dolná hranica,
- číslo n je horná hranica.

Sumačná notácia

Alternatívna notácia

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{i \in \{m,\dots,n\}} a_i = \sum_{m \leq i \leq n} a_i$$

Sumačná notácia

Niektoré vlastnosti

Platí

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{j=m}^{n} a_j$$

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{i=m}^{n} a_{n-m+i}$$

$$c\sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{i=m}^{n} ca_i$$

$$\sum_{i=m}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=m}^{n} a_i + \sum_{i=m}^{n} b_i.$$

Sumačná notácia

Dôkaz

Nech $m \leq n$. Potom

$$a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_{n-1} + a_n = \\ a_n + a_{n-1} + \cdots + a_{m+2} + a_{m+1} + a_m$$

$$c(a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_{n-1} + a_n) = \\ ca_m + ca_{m+1} + ca_{m+2} + \cdots + ca_{n-1} + ca_n$$

$$(a_m + b_m) + (a_{m+1} + b_{m+1}) + \cdots + (a_n + b_n) = \\ (a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n) + (b_m + b_{m+1} + \cdots + b_n).$$

Binomická veta

Úloha

Určite (konštantné) koeficienty v úplnom rozvoji výrazu

$$(x + y)^n.$$

Hľadané koeficienty sa nazývajú binomické koeficienty.

Riešenie

Binomické koeficienty pre niektoré špeciálne prípady:

$$\begin{aligned}
(x + y)^2 &= x^2 + 2xy + y^2 \\
(x + y)^3 &= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 \\
(x + y)^4 &= x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4 \\
(x + y)^5 &= x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5.
\end{aligned}$$

Binomická veta

Pascalov trojuholník

$$\binom{0}{0}^{1}$$

$$\binom{1}{0}^{1} \quad \binom{1}{1}^{1}$$

$$\binom{2}{0}^{1} \quad \binom{2}{1}^{2} \quad \binom{2}{2}^{1}$$

$$\binom{3}{0}^{1} \quad \binom{3}{1}^{3} \quad \binom{3}{2}^{3} \quad \binom{3}{3}^{1}$$

$$\binom{4}{0}^{1} \quad \binom{4}{1}^{4} \quad \binom{4}{2}^{6} \quad \binom{4}{3}^{4} \quad \binom{4}{4}^{1}$$

$$\binom{5}{0}^{1} \quad \binom{5}{1}^{5} \quad \binom{5}{2}^{10} \quad \binom{5}{3}^{10} \quad \binom{5}{4}^{5} \quad \binom{5}{5}^{1}$$

Binomická veta

Tvrdenie

Potom pre ľubovolné čísla x a y platí

$$\begin{aligned}(x+y)^5 &= \binom{5}{5}x^5y^0 + \binom{5}{4}x^4y^1 + \binom{5}{3}x^3y^2 + \\ &\quad \binom{5}{2}x^2y^3 + \binom{5}{1}x^1y^4 + \binom{5}{0}x^0y^5 \\ &= \sum_{k=0}^{5}\binom{5}{5-k}x^{5-k}y^k \\ &= \sum_{k=0}^{5}\binom{5}{k}x^ky^{5-k}.\end{aligned}$$

Binomická veta

Kombinatorický dôkaz

Platí

$$(x + y)^5 = (x + y)(x + y)(x + y)(x + y)(x + y).$$

Uvažujme napríklad tie roznásobenia výrazu na pravej strane, ktoré prispievajú jednotkou ku koeficientu pri člene

$$x^3y^2$$

v jeho úplnom rozvoji. Každé také roznásobenie odpovedá práve jednému preusporiadaniu písmen 5-prvkového slova

$$xxxyy.$$

Ide o permutácie s opakovaním. Ich počet je rovný číslu $\binom{5}{3}$.

Binomická veta

Binomická veta

Nech n je prirodzené číslo. Potom pre ľubovolné čísla x a y platí

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} x^{n-k} y^k.$$

Poznámka

Kombinačné čísla sa preto tiež nazývajú binomické koeficienty.

Binomická veta

Kombinatorický dôkaz

Platí

$$(x+y)^n = \overbrace{(x+y)(x+y)(x+y)\cdots(x+y)(x+y)}^{n \text{ činiteľov}}.$$

Uvažujme tie roznásobenia výrazu na pravej strane, ktoré prispievajú jednotkou ku koeficientu pri člene $x^k y^{n-k}$ v jeho úplnom rozvoji. Každé roznásobenie odpovedá práve jednému preusporiadaniu písmen n-prvkového slova (ide o permutácie s opakovaním)

$$\overbrace{xxx\ldots xx}^{k \text{ znakov}}\ \overbrace{yyy\ldots yy}^{(n-k) \text{ znakov}},$$

ktoré pozostáva s k výskytov znaku x a s $(n-k)$ výskytov znaku y. Ich počet je rovný číslu $\binom{n}{k}$.

Binomická veta

Dôsledok

Pre každé prirodzené číslo n platí

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

Dôkaz

Platí

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot 1 \cdot 1 \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} \overset{\text{Binomická veta}}{=} (1+1)^n = 2^n.\end{aligned}$$

Binomická veta

Dôsledok

Pre každé prirodzené číslo n platí

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} = 0^n.$$

Dôkaz

Platí

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k 1\\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k 1^{n-k} \overset{\text{Binomická veta}}{=} (-1+1)^n = 0^n.\end{aligned}$$

Základné informácie o predmete

Všeobecné informácie o kurze

https://dai.fmph.uniba.sk/courses/dmat/

- Informačný list predmetu:
  - sylabus predmetu,
  - literatúra.
- Výučba v predošlých rokoch.

Výučba tento semester

https://dai.fmph.uniba.sk/courses/dmat/2324zs/

- Novinky.
- Organizácia predmetu.
- Domáce úlohy.
- Semestrálne testy: 6. týždeň 25.X a 11. týždeň 29.XI o 18.10 v poslucharni A a B.
- Pravidlá: podmienky na absolvovanie predmetu.

Základné informácie o predmete

Prednášky

- Prednáška: pondelok 9.00 2h A.
- Učiteľ: Ján Komara, m. I-16, jan.komara@fmph.uniba.sk.
- Konzultácie:
  - pondelok 14.30 - 15.00, m. I-16;
  - piatok okolo 13.00, online.

Cvičenia a kurzy (malá prednáška/cvičenie)

- 1AIN1 (Komara): utorok 14.50 2h M-X, streda 8.10 2h M-VI.
- 1AIN2 (Náther): utorok 14.00 2h M-III, streda 8.10 2h M-IX.
- 1AIN3 (Markošová): utorok 14.50 2h M-VI, štvrtok 11.30 2h F1-328.
- 1AIN4 (Komara): utorok 11.30 2h M-X, streda 14.00 2h M-X.
- 1AIN5 (Mihálik): utorok 11.30 2h M-XI, streda 16.30 2h M-I.

Základné informácie o predmete

Hodnotenie počas semestra

- Počas semestra môžete dohromady získať 150 bodov.
  - 1. a 2. semestrálny test: 2 x 40 bodov.
  - Domáce úlohy: 40 bodov.
  - Cvičenia: 40 bodov.
  - Prémiové hodnotenie (aktivita na cvičeniach, ...).
- Požiadavka priebežného semestrálneho hodnotenia: 75 bodov.

Skúškové obdobie

- Skúška pozostáva z písomnej (150 bodov) a ústnej časti (teoretická otázka pre hodnotenie A, B).
- Menej ako 75 bodov z písomky: skúška sa musí opakovať.

Celkové hodnotenie

- Dohromady možno získať 300 bodov.
- Známky: E 50% (150 bodov), D 60%, C 70%, B 80%, A 90%.

Základné informácie o predmete

Distančná výučba

- Základné informácie
  - link: https://uniba.sk/elearning
- Moodle
  - domáce úlohy
  - link: https://moodle.uniba.sk
  - kurz: 1-AIN-121 Diskrétna matematika (1) ZS 2023/24
  - heslo: dmat20232024
- MS Teams
  - konzultácie
  - link: https://teams.microsoft.com
  - kurz: 1-AIN-121 Diskrétna matematika (1) ZS 2023/24
  - kód: 21dw746

Záver

Cvičenie a kurz

- Vlastnosti kombinačných čísel.
- Sumačná notácia.
- Binomická a multinomická veta.

Organizácia predmetu

- Konzultácie
  - Dnes o 14.30, m. I-16.
  - V piatok okolo 12.00, online (spresnenie večer predtým).
- 1. domáca úloha
  - Zadanie na webovej stránke predmetu.
  - Riešenie odovzdať do MOODLE najneskôr v pondelok 9. októbra.
  - Riešenie v editore, nie rukopis. Výnimka: 1. príklad (pozri slajdy z 1. prednášky).
  - Program nie je riešením!

Záver

Otázky

- Ak máte otázku, tak zdvihnite ruku.

Koniec prednášky