1-AIN-121 Diskrétna matematika (1)

Zimný semester 2023/24

2. prednáška

Ján Komara

Obsah prednášky

Zopakovanie

Kombinatorické pravidlo súčtu

Nech A je konečná množina, ktorá sa dá vyjadriť ako zjednotenie navzájom disjunktných množín $A_1, A_2, \ldots, A_k$. Potom počet prvkov množiny A je určený súčtom počtov prvkov množín $A_1, A_2, \ldots, A_k$:

$$|A| = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_k| .$$

Kombinatorické pravidlo súčinu

Nech A je množina k-prvkových postupností takých, že

- prvé prvky takýchto postupností vyberáme n_1 spôsobmi,
- pre každý výber prvého prvku ich druhé prvky vyberáme n_2 spôsobmi,
- pre každý výber prvého a druhého prvku ich tretie prvky vyberáme n_3 spôsobmi,
- $\ldots,$

Zopakovanie

- nakoniec pre každý výber prvých $k-1$ prvkov ich posledné prvky vyberáme n_k spôsobmi.

Potom počet postupností v množine A je rovný súčinu

$$n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \cdots \cdot n_k \equiv n_1 n_2 n_3 \ldots n_k .$$

Kombinatorické pravidlo komplementu

Nech A je podmnožina konečnej množiny U. Potom platí

$$|A| = |U| - \left|\overline{A}\right| \qquad \left|\overline{A}\right| = |U| - |A| ,$$

kde $\overline{A} = \{x \in U \mid x \notin A\}$ je komplement množiny A v množine U.

Dôkaz

Tvrdenie je dôsledok nasledujúcich vlastností

$$U = A \cup \overline{A} \qquad \left|A \cup \overline{A}\right| = |A| + \left|\overline{A}\right| .$$

Zopakovanie

Faktoriál

Faktoriálom prirodzeného čísla n rozumieme číslo $n!$ také, že

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

Platí $1! = 1$ a $0! = 1$.

Permutácie

Zoradenie prvkov n-prvkovej množiny do postupnosti nazývame permutáciou tejto množiny. Ich počet označujeme $\mathrm{P}(n)$.

Veta

Pre každé prirodzené číslo n platí identita $\mathrm{P}(n) = n!$.

Dôkaz

Tvrdenie sa dokáže pomocou pravidla súčinu.

Zopakovanie

Permutácie s opakovaním

Zoradenie n prvkov z k druhov do postupnosti, v ktorej prvky rovnakého druhu nerozlišujeme, nazývame permutáciou s opakovaním n prvkov z k druhov. Ich počet označujeme $\mathrm{P}'(n_1, \ldots, n_k)$, ak medzi tými n prvkami je n_1 prvkov 1. druhu, n_2 prvkov 2. druhu, ..., n_k prvkov k-tého druhu, pričom $n_1 + \cdots + n_k = n$.

Veta

Pre každé prirodzené čísla $n_1, \ldots, n_k$ platí identita

$$\mathrm{P}'(n_1, \ldots, n_k) = \frac{(n_1 + \cdots + n_k)!}{n_1! \cdots n_k!}.$$

(Výraz na pravej strane je rovný 1 pre $k = 0$.)

Dôkaz

Metódou dvojitého počítania dokážeme rovnosť:

$$\mathrm{P}'(n_1, \ldots, n_k)\, n_1! \cdots n_k! = (n_1 + \cdots + n_k)!.$$

Zopakovanie

Variácie

Usporiadaný výber k prvkov z n prvkovej množiny sa nazýva variáciou k-tej triedy z n prvkov. Ich počet označujeme $\mathrm{V}(n, k)$.

Veta

Pre každé prirodzené čísla n a k platí identita

$$\mathrm{V}(n, k) = n(n-1)\cdots(n-k+1).$$

(Výraz na pravej strane je rovný n pre $k = 1$ a 1 pre $k = 0$.)

Dôkaz

Tvrdenie sa dokáže pomocou pravidla súčinu.

Zopakovanie

Umocňovanie

Prirodzenou n-tou mocninou, kde n je prirodzené číslo, reálneho čísla a rozumieme číslo a^n také, že

$$a^n = \overbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}^{n\text{-činiteľov}}.$$

Platí $a^1 = a$ a $a^0 = 1$.

Variácie s opakovaním

Usporiadaný výber k prvkov z n druhov, v ktorom prvky rovnakého druhu nerozlišujeme, sa nazýva variáciou s opakovaním k-tej triedy z n druhov. Ich počet označujeme $\mathrm{V}'(n, k)$.

Veta

Pre každé dve prirodzené čísla n a k platí identita $\mathrm{V}'(n, k) = n^k$.

Dôkaz

Tvrdenie sa dokáže pomocou pravidla súčinu.

Zopakovanie

Kombinatorika (stručné sylaby)

- 1. týždeň
  Základné enumeračné princípy: pravidlo súčtu a súčinu. Permutácie a variácie bez opakovania a s opakovaním.
- 2. týždeň
  Ďalšie enumeračné princípy: princíp bijekcie. Kombinácie bez opakovania a s opakovaním.
- 3. týždeň
  Kombinačné čísla. Kombinatorické identity. Binomická a multinomická veta.
- 4. týždeň
  Ešte jeden enumeračný princíp: princíp zapojenia a vypojenia.

Zopakovanie

Literatúra

- Jajcayová, T., Komara, J.: vlastné elektronické texty zverejňované na webovej stránke predmetu.
- Knor, M.: Kombinatorika a teória grafov I, MFF UK, 2000.
- Grimaldi, R. P.: Discrete and Combinatorial Mathematics. Boston : Pearson / Addison-Wesley, 2004.

Doplňujúca literatúra

- Znám, Š.: Kombinatorika a teória grafov, MFF UK, 1981.
- Matoušek, J., Nešetřil, J.: Kapitoly z diskrétnej matematiky, Nakladatelství Karolinum, Praha 2009 (4. vydanie).

Kombinácie

Motivačný príklad

Úloha

64 členov urbárskej spoločnosti vyberá medzi sebou 5 funkcionárov:

predsedu, tajomníka, hospodára, pokladníka a revízora.

Koľko je rôznych možností, ako ich môžu vybrať?

Kombinácie

Motivačný príklad

Úloha

64 členov šachovej spoločnosti vyberá medzi sebou 5 funkcionárov:

♔	♕	♖	♗	♘
Kráľ	Dáma	Veža	Strelec	Jazdec

Koľko je rôznych možností, ako ich môžu vybrať?

Prvé riešenie

Najjednoduchší spôsob, ako to spraviť, je vybrať funkcionárov spoločnosti priamo. V takomto prípade ide o spočítanie počtu usporiadaných výberov 5 ľudí zo 64 členov. No a ten je rovný číslu:

$$64 \cdot 63 \cdot 62 \cdot 61 \cdot 60.$$

Určovali sme tu totiž počet variácií 5-tej triedy zo 64 prvkov.

Kombinácie

Motivačný príklad

Úloha

64 členov šachovej spoločnosti vyberá medzi sebou 5 funkcionárov:

Kráľ Dáma Veža Strelec Jazdec

Koľko je rôznych možností, ako ich môžu vybrať?

Druhé riešenie

Druhý spôsob ako vybrať funkcionárov spočíva vo zvolení 5 členného výboru. Označme si takýto (pre nás zatiaľ neznámy) počet možností ako $\mathrm{C}(64, 5)$. Členovia výboru si potom medzi sebou rozdelia jednotlivé funkcie 5! spôsobmi. Počet možností ako vybrať funkcionárov je v tomto prípade rovný číslu:

$$\mathrm{C}(64, 5) \cdot 5!.$$

Poznámka
Oba spôsoby výberu funkcionárov tejto spoločnosti vedú k tomu istému počtu. Platí tak identita

$$\mathrm{C}(64, 5) \cdot 5! = 64 \cdot 63 \cdot 62 \cdot 61 \cdot 60.$$

Odtiaľ dostaneme

$$\mathrm{C}(64, 5) = \frac{64 \cdot 63 \cdot 62 \cdot 61 \cdot 60}{5!}.$$

Zlomok na pravej strane sa nazýva kombinačné číslo $\binom{64}{5}$ (čítaj *64 nad 5*).

Poznámka
Kombinačné číslo $\binom{64}{5}$ tak určuje počet neusporiadaných výberov 5 prvkov zo 64 prvkovej množiny.

Kombinačné čísla

Kombinačné číslo $\binom{n}{k}$ (čítaj *n nad k*) je definované vzťahom

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}.$$

Platí $\binom{n}{1} = n$ a $\binom{n}{0} = 1$.

Kombinácie

Neusporiadaný výber k prvkov z n-prvkovej množiny nazývame kombináciou k-tej triedy z n prvkov. Ich počet označujeme $\mathrm{C}(n, k)$.

Veta

Pre každé dve prirodzené čísla n a k platí

$$\mathrm{C}(n, k) = \binom{n}{k}.$$

Dôkaz

Tvrdenie sa dokáže metódou dvojitého počítania

$$\mathrm{C}(n, k)k! = n(n-1)\cdots(n-k+1)$$

podobne ako v predchádzajúcom príklade.

Kombinácie

Užitočný príklad

Úloha

Nech $k \leq n$. Koľko je n-bitových slov, ktoré majú práve k jednotiek?

Riešenie

Úlohu môžeme vyriešiť troma spôsobmi ako

- permutácie s opakovaním n bitov pozostávajúcich s k jednotiek a $n - k$ núl;
- neusporiadaný výber k pozícií pre jednotky v n-bitovom slove, zvyšné pozície sú obsadené nulami (ide o kombinácie k-tej triedy z n prvkov);
- neusporiadaný výber $n - k$ pozícií pre nuly v n-bitovom slove, zvyšné pozície sú obsadené jednotkami (ide o kombinácie $(n-k)$-tej triedy z n prvkov).

Kombinácie

Užitočný príklad

Hľadaný počet je tak rovný číslu

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Základné kombinatorické princípy

Kombinatorické pravidlo bijekcie

Pre ľubovolné dve konečné množiny A a B platí rovnosť $|A| = |B|$ práve vtedy, keď ....

Základné kombinatorické princípy

Ako to zistiť bez spočítania?

Nechceme sa riadiť touto riekankou:

Jeden, dva, tri, štyri, päť,
spočítam si všetko hneď.
Päť kvietočkov na lúke, päť prštekov na ruke,
päť gulôčok v jednej jamke, utekajme k našej mamke.
Jeden, dva, tri, štyri, päť, už to vieme naspamäť.

Základné kombinatorické princípy

Kombinatorické pravidlo bijekcie

Pre ľubovolné dve konečné množiny A a B platí rovnosť $|A| = |B|$ práve vtedy, keď existuje medzi nimi bijekcia.

Základné kombinatorické princípy

Úloha

Uvažujme rýdzo rastúce 4-prvkové postupnosti, ktorých prvky vyberáme spomedzi čísel $1, 2, \ldots, 9$. Každá takáto postupnosť (x_1, x_2, x_3, x_4) spĺňa tieto nerovnosti

$$1 \leq x_1 < x_2 < x_3 < x_4 \leq 9.$$

Koľko takýchto postupností je možné vytvoriť?

Riešenie

Nasledujúce zobrazenie je bijekciou medzi množinou všetkých 4-prvkových postupností s uvedenou vlastnosťou a systémom 4-prvkových podmnožín 9-prvkovej množiny $\{1, 2, \ldots, 9\}$:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto \{x_1, x_2, x_3, x_4\}.$$

Podľa pravidla bijekcie hľadaný počet je rovný číslu $\binom{9}{4}$.

Kombinácie s opakovaním

Príklad

Úloha

Koľko je možností ako pripraviť menu zo 4 druhov jedál pre 7 zákazníkov?

Prvé riešenie (hľadisko zákazníka)

Označme si jednotlivé druhy jedál písmenami A, B, C a D. Každé menu tak môžeme reprezentovať ako slovo dĺžky 7 nad 4-prvkovou abecedou. Napríklad:

- slovo $ADAABAD$ predstavuje menu kde prvý, tretí, štvrtý a šiesty zákazník si vybral jedlo A, piaty zákazník jedlo B, a druhý a siedmy zákazník jedlo D.

Ide tak o variácie s opakovaním 7-triedy zo 4 druhov. Hľadaný počet je rovný číslu

$$4^7 = 16\,384.$$

Kombinácie s opakovaním

Príklad

Úloha

Koľko je možností ako pripraviť menu zo 4 druhov jedál pre 7 zákazníkov?

Druhé riešenie (hľadisko kuchára)

Teraz sa pozrieme na túto úlohu z hľadiska kuchára. Z jeho pohľadu sú menu reprezentované slovami *ADAABAD* a *AAAABDD* nerozlíšiteľné. Pýtame sa preto, koľko je možností ako pripraviť takéto menu z hľadiska kuchára. Označme si tento počet ako $\mathrm{C}'(4,7)$.

Kombinácie s opakovaním

Príklad

Každé menu z pohľadu kuchára budeme reprezentovať ako 10-bitové slovo, ktoré pozostáva z 3 jednotiek a zo 7 núl. Napríklad:

- 10-bitové slovo 0000101100 reprezentuje menu $AAAABDD$,
- 10-bitové slovo 0100100010 reprezentuje menu $ABBCCCD$.

Hľadaný počet je tak rovný číslu

$$\mathrm{C}'(4,7) = \frac{10!}{3!7!} = \binom{10}{3} = \binom{10}{7} = 120.$$

Kombinácie s opakovaním

Príklad

Poznámka

Všimnime si, že číslo $\mathrm{C}'(4,7)$ určuje počet neusporiadaných výberov s opakovaním 7 prvkov zo 4 druhov. Tieto výbery nazývame kombinácie s opakovaním 7 triedy zo 4 druhov.

Poznámka

Nasledujúce enumeračné úlohy vedú k tomu istému počtu, ako náš problém výberu jedál z hľadiska kuchára:

- Koľkými rôznymi spôsobmi môžno rozdeliť 7 jednofarebných gulôčok do 4 očíslovaných priehradok?
- Koľko nezáporných celočíselných riešení má rovnica $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7$? (Riešenia tvoria usporiadanú partíciu čísla 7.)

Kombinácie s opakovaním

Neusporiadaný výber k prvkov z n druhov, v ktorej prvky rovnakého druhu nerozlišujeme, nazývame kombináciou s opakovaním k-tej triedy z n druhov. Ich počet označujeme $\mathrm{C}'(n, k)$.

Veta

Pre každé dve prirodzené čísla $n \geq 1$ a k platí

$$\mathrm{C}'(n, k) = \frac{(n-1+k)!}{(n-1)!k!} = \binom{n-1+k}{n-1} = \binom{n-1+k}{k}.$$

Dôkaz

Tvrdenie dokážeme podobne ako v predchádzajúcom príklade

Základné informácie o predmete

Všeobecné informácie o kurze

https://dai.fmph.uniba.sk/courses/dmat/

- Informačný list predmetu:
  - sylabus predmetu,
  - literatúra.
- Výučba v predošlých rokoch.

Výučba tento semester

https://dai.fmph.uniba.sk/courses/dmat/2324zs/

- Novinky.
- Organizácia predmetu.
- Domáce úlohy.
- Semestrálne testy: 6. týždeň 25.X a 11. týždeň 29.XI o 18.10 v posluchárni A a B.
- Pravidlá: podmienky na absolvovanie predmetu.

Základné informácie o predmete

Prednášky

- Prednáška: pondelok 9.00 2h A.
- Učiteľ: Ján Komara, m. I-16, jan.komara@fmph.uniba.sk.
- Konzultácie:
  - pondelok 14.30 - 15.00, m. I-16;
  - piatok okolo 13.00, online.

Cvičenia a kurzy (malá prednáška/cvičenie)

- 1AIN1 (Komara): utorok 14.50 2h M-X, streda 8.10 2h M-VI.
- 1AIN2 (Náther): utorok 14.00 2h M-III, streda 8.10 2h M-IX.
- 1AIN3 (Markošová): utorok 14.50 2h M-VI, štvrtok 11.30 2h F1-328.
- 1AIN4 (Komara): utorok 11.30 2h M-X, streda 14.00 2h M-X.
- 1AIN5 (Mihálik): utorok 11.30 2h M-XI, streda 16.30 2h M-I.

Základné informácie o predmete

Hodnotenie počas semestra

- Počas semestra môžete dohromady získať 150 bodov.
  - 1. a 2. semestrálny test: 2 x 40 bodov.
  - Domáce úlohy: 40 bodov.
  - Cvičenia: 40 bodov.
  - Prémiové hodnotenie (aktivita na cvičeniach, ...).
- Požiadavka priebežného semestrálneho hodnotenia: 75 bodov.

Skúškové obdobie

- Skúška pozostáva z písomnej (150 bodov) a ústnej časti (teoretická otázka pre hodnotenie A, B).
- Menej ako 75 bodov z písomky: skúška sa musí opakovať.

Celkové hodnotenie

- Dohromady možno získať 300 bodov.
- Známky: E 50% (150 bodov), D 60%, C 70%, B 80%, A 90%.

Základné informácie o predmete

Distančná výučba

- Základné informácie
  - link: https://uniba.sk/elearning
- Moodle
  - domáce úlohy
  - link: https://moodle.uniba.sk
  - kurz: 1-AIN-121 Diskrétna matematika (1) ZS 2023/24
  - heslo: dmat20232024
- MS Teams
  - konzultácie
  - link: https://teams.microsoft.com
  - kurz: 1-AIN-121 Diskrétna matematika (1) ZS 2023/24
  - kód: 21dw746

Záver

Cvičenie a kurz

- Kombinácie bez opakovania a s opakovaním.
- Rôzne enumeračné úlohy, ktoré sa riešia podobne ako kombinácie s opakovaním.

Organizácia predmetu

- Konzultácie
  - Dnes o 14:30, m. I-16.
  - V piatok okolo 13:00, online (spresnenie večer predtým).
- 1. domáca úloha
  - Zadanie na webovej stránke predmetu niekedy vo štvrtok.
  - Krátky kurz z LaTeX-u bude v piatok 29. septembra predbežne o 14.00, online, so záznamom.
  - Riešenie odovzdať do MOODLE najneskôr v pondelok 9. októbra.

Záver

Otázky

- Ak máte otázku, tak zdvihnite ruku.

Koniec prednášky