1-AIN-121 Diskrétna matematika (1)

Zimný semester 2023/24

1. prednáška

Ján Komara

Obsah prednášky

Cieľ a obsah predmetu

Cieľ predmetu

- Tento kurz poskytuje študentom matematické základy, ktoré sú nevyhnutné pre štúdium informatiky.
- Študenti si zároveň osvoja matematickú kultúru, spôsob myslenia, ako aj metódy dôkazov, ktoré sa používajú v matematike.
- Po absolvovaní kurzu budú mať vybudovanú širokú bázu príkladov, na ktorých sa dajú demonštrovať pojmy a metódy v matematike, ale aj v iných predmetoch, napr. programovaní.
- Budú mať praktické zručnosti v nárabaní s pojmami v diskrétnej matematike.

Cieľ a obsah predmetu

Obsah predmetu (12–13 týždňov)

- Kombinatorika (4 týždne).
  Základné enumeračné princípy. Základné kombinatorické konfigurácie. Kombinatorické identity. Princíp zapojenia a vypojenia.
- Logika (3–4 týždne).
  Jazyk formúl. Základné typy matematických dôkazov: priamy a nepriamy dôkaz, dôkaz sporom, dôkaz indukciou.
- Množiny (3 týždne).
  Základné množinové vzťahy a množinové operácie. Binárne relácie. Zobrazenia.
- Pravdepodobnosť (2 týždne).
  Experiment a náhodný jav. Diskrétna pravdepodobnosť. Bernoulliho schéma. Podmienená pravdepodobnosť.

Repetitórium stredoškolskej matematiky

Množinové vzťahy

- Byť prvkom množiny

$$1 \in \{1, 2\} \qquad 3 \notin \{1, 2\}.$$

- Rovnosť množín

$$\{1, 2\} = \{2, 1\} = \{1, 2, 1\}.$$

Niektoré význačné množiny

- Množina celých čísel

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

- Množina prirodzených čísel

$$\mathrm{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \geq 0\}.$$

Repetitórium stredoškolskej matematiky

Množinové operácie

- Prázdna množina

$$\emptyset = \{x \mid x \neq x\}.$$

- Zjednotenie množín

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ alebo } x \in B\}.$$

- Prienik množín

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ a } x \in B\}.$$

- Karteziánsky súčin množín

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ a } y \in B\}.$$

Repetitórium stredoškolskej matematiky

Konečné množiny

$|A|$ označuje počet prvkov konečnej množiny A.

- Napríklad

$$|\emptyset| = 0 \qquad |\{1,2\}| = |\{2,1\}| = |\{1,2,1\}| = 2.$$

- *Pravidlo súčtu (sčítavací princíp).* Ak A a B sú disjunktné konečné množiny ($A \cap B = \emptyset$), potom

$$|A \cup B| = |A| + |B|\,.$$

- *Pravidlo súčinu (násobiaci princíp).* Ak A a B sú konečné množiny, potom

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|\,.$$

Poznámka

Notácia pre operáciu násobenia dvoch čísel

$$a \cdot b \equiv ab \equiv a \times b,$$

$$2 \cdot 3 \equiv (2)(3) \equiv 2 \times 3.$$

Čo rozumieme kombinatorikou?

Kombinatorika je tá časť matematiky, ktorá sa venuje štúdiu rôznych konečných výberov.

Aké obmedzenia kladieme na konečné výbery?

- Členy týchto výberov sú prvkami nejakého pevne vybraného konečného súboru.
- Na takéto výbery kladieme rôzne požiadavky. Napríklad:
  - či prvky vo výbere sú usporiadané alebo nie,
  - či prvky vo výbere sa môžu opakovať alebo nie.

Kombinatorické konfigurácie

Sú to skupiny výberov spĺňajúce tie isté vybrané požiadavky.

- Príkladom sú variácie, permutácie či kombinácie.

Aké problémy rieši kombinatorika?

- Určiť, či výbery s požadovanou vlastnosťou existujú alebo nie.
- Ak také výbery existujú, dať návod, ako zostrojiť všetky výbery s požadovanou vlastnosťou.
- Určiť počet všetkých výberov s požadovanou vlastnosťou (enumeračný problém).

Aké kombinatorické problémy budeme riešiť my?

Na tomto predmete sa budeme venovať enumeračným úloham.

Stručné sylaby (4 týždne)

- 1. týždeň
  Základné enumeračné princípy: pravidlo súčtu a súčinu. Variácie a permutácie bez opakovania a s opakovaním.
- 2. týždeň
  Ďalšie enumeračné princípy: princíp bijekcie. Kombinácie bez opakovania a s opakovaním.
- 3. týždeň
  Kombinačné čísla. Kombinatorické identity. Binomická a multinomická veta.
- 4. týždeň
  Ešte jeden enumeračný princíp: princíp zapojenia a vypojenia.

Literatúra

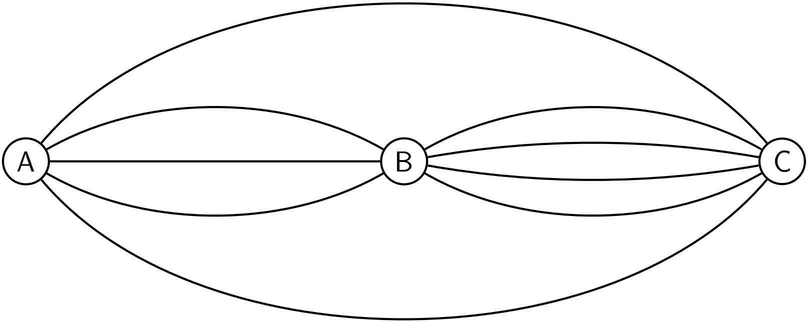
- Jajcayová, T., Komara, J.: vlastné elektronické texty zverejňované na webovej stránke predmetu.
- Knor, M.: Kombinatorika a teória grafov I, MFF UK, 2000.
- Grimaldi, R. P.: Discrete and Combinatorial Mathematics. Boston : Pearson / Addison-Wesley, 2004.

Doplňujúca literatúra

- Znám, Š.: Kombinatorika a teória grafov, MFF UK, 1981.
- Matoušek, J., Nešetřil, J.: Kapitoly z diskrétnej matematiky, Nakladatelství Karolinum, Praha 2009 (4. vydanie).

Úloha

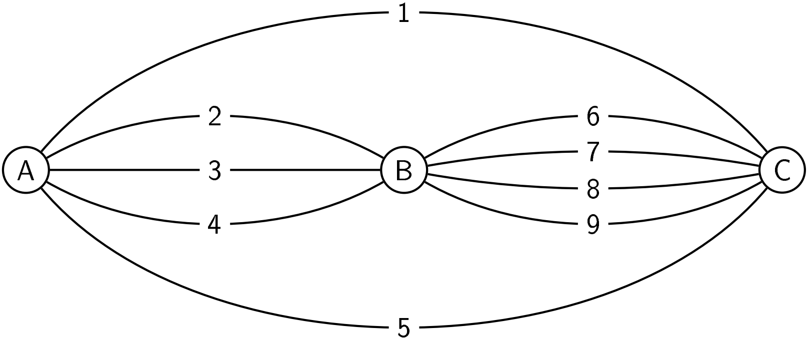
Na nasledujúcom obrázku je vyznačená cestná sieť medzi mestami A, B a C:



Našou úlohou je určiť počet ciest z mesta A do mesta C.

Prvé riešenie

Koncepčne najjednoduchší spôsob ako riešiť takúto úlohu je najprv vymenovať všetky možnosti a potom ich spočítať. Pre lepšiu orientáciu očíslujme si jednotlivé úseky cestnej siete tak, ako je to na obrázku:



Vysvetlenie

Napríklad cestu z A do C cez B, ktorá prechádza úsekmi 3 a 9, budeme symbolicky zapisovať ako $A \xrightarrow{3} B \xrightarrow{9} C$. Podobne priamu cestu z A do C, ktorá prechádza úsekom 1, zapíšeme stručne zas takto $A \xrightarrow{1} C$.

Zoznam všetkých ciest z A do C

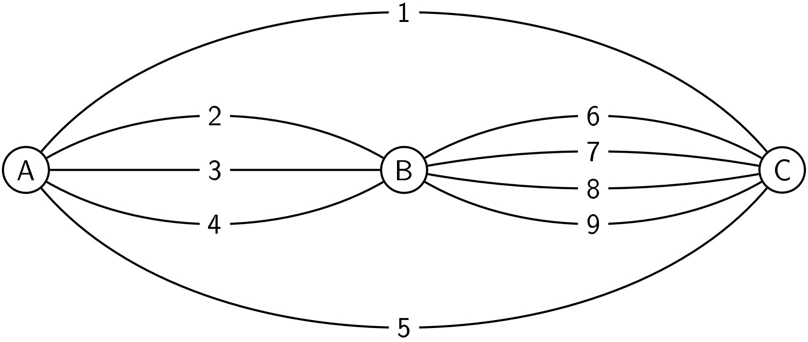
$$A \xrightarrow{3} B \xrightarrow{9} C,\ A \xrightarrow{1} C,\ A \xrightarrow{2} B \xrightarrow{6} C,\ A \xrightarrow{4} B \xrightarrow{9} C,\\ A \xrightarrow{2} B \xrightarrow{9} C,\ A \xrightarrow{3} B \xrightarrow{7} C,\ A \xrightarrow{2} B \xrightarrow{8} C,\ A \xrightarrow{4} B \xrightarrow{6} C,\\ A \xrightarrow{4} B \xrightarrow{8} C,\ A \xrightarrow{2} B \xrightarrow{7} C,\ A \xrightarrow{3} B \xrightarrow{8} C,\ A \xrightarrow{3} B \xrightarrow{7} C,\\ A \xrightarrow{3} B \xrightarrow{6} C,\ A \xrightarrow{5} C.$$

Výsledok

Počet ciest z mesta A do mesta C je tak rovný číslu 14.

Prvé riešenie

Koncepčne najjednoduchší spôsob ako riešiť takúto úlohu je najprv vymenovať všetky možnosti a potom ich spočítať. Pre lepšiu orientáciu očíslujme si jednotlivé úseky cestnej siete tak, ako je to na obrázku:



Vysvetlenie

Napríklad cestu z A do C cez B, ktorá prechádza úsekmi 3 a 9, budeme symbolicky zapisovať ako $A \xrightarrow{3} B \xrightarrow{9} C$. Podobne priamu cestu z A do C, ktorá prechádza úsekom 1, zapíšeme stručne zas takto $A \xrightarrow{1} C$.

Zoznam všetkých ciest z A do C

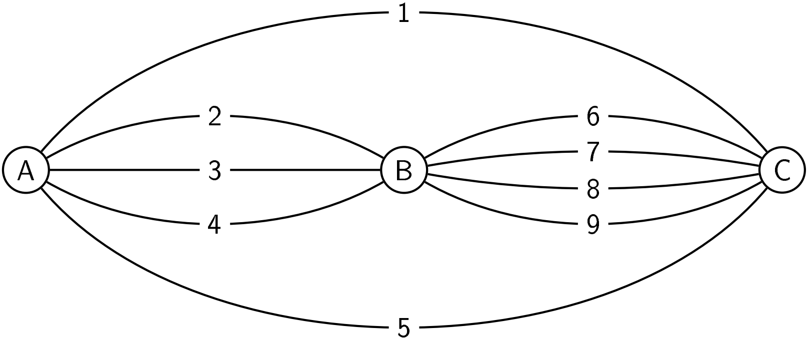
$$A \xrightarrow{3} B \xrightarrow{9} C,\ A \xrightarrow{1} C,\ A \xrightarrow{2} B \xrightarrow{6} C,\ A \xrightarrow{4} B \xrightarrow{9} C,$$
$$A \xrightarrow{2} B \xrightarrow{9} C,\ \boldsymbol{A \xrightarrow{3} B \xrightarrow{7} C},\ A \xrightarrow{2} B \xrightarrow{8} C,\ A \xrightarrow{4} B \xrightarrow{6} C,$$
$$A \xrightarrow{4} B \xrightarrow{8} C,\ A \xrightarrow{2} B \xrightarrow{7} C,\ A \xrightarrow{3} B \xrightarrow{8} C,\ \boldsymbol{A \xrightarrow{3} B \xrightarrow{7} C},$$
$$A \xrightarrow{3} B \xrightarrow{6} C,\ A \xrightarrow{5} C.$$

Výsledok

Počet ciest z mesta A do mesta C je tak rovný číslu 14.

Prvé riešenie

Koncepčne najjednoduchší spôsob ako riešiť takúto úlohu je najprv vymenovať všetky možnosti a potom ich spočítať. Pre lepšiu orientáciu očíslujme si jednotlivé úseky cestnej siete tak, ako je to na obrázku:



Vysvetlenie

Napríklad cestu z A do C cez B, ktorá prechádza úsekmi 3 a 9, budeme symbolicky zapisovať ako $A \xrightarrow{3} B \xrightarrow{9} C$. Podobne priamu cestu z A do C, ktorá prechádza úsekom 1, zapíšeme stručne zas takto $A \xrightarrow{1} C$.

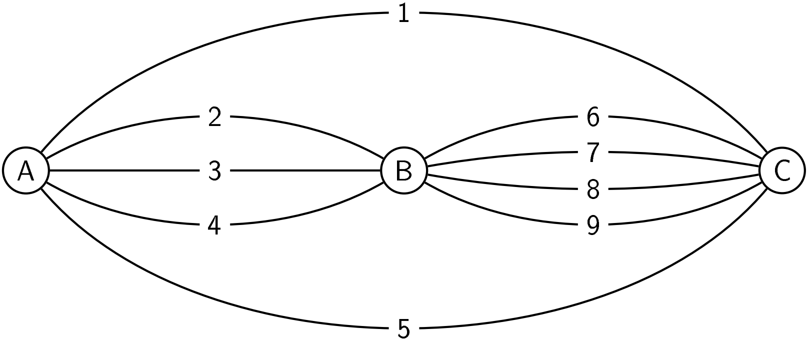
Zoznam všetkých ciest z A do C

$$A \xrightarrow{3} B \xrightarrow{9} C,\ A \xrightarrow{1} C,\ A \xrightarrow{2} B \xrightarrow{6} C,\ A \xrightarrow{4} B \xrightarrow{9} C,$$
$$A \xrightarrow{2} B \xrightarrow{9} C,\ A \xrightarrow{3} B \xrightarrow{7} C,\ A \xrightarrow{2} B \xrightarrow{8} C,\ A \xrightarrow{4} B \xrightarrow{6} C,$$
$$A \xrightarrow{4} B \xrightarrow{8} C,\ A \xrightarrow{2} B \xrightarrow{7} C,\ A \xrightarrow{3} B \xrightarrow{8} C,\ A \xrightarrow{4} B \xrightarrow{7} C,$$
$$A \xrightarrow{3} B \xrightarrow{6} C,\ A \xrightarrow{5} C.$$

Výsledok

Počet ciest z mesta A do mesta C je tak rovný číslu 14.

Druhé riešenie



Aby sme sa vyhli riziku, že sme niektorú správnu možnosť vynechali, úlohu ešte raz vyriešime, tentokrát *systematickým* vymenovaním všetkých možností.

Kombinatorika

Jednoduchý príklad

Vysvetlenie

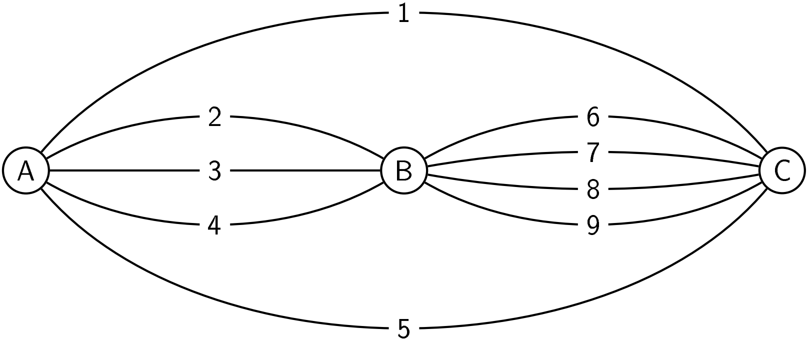
Cesty z mesta A do mesta C rozdelíme do štyroch skupín:

- Priame cesty z mesta A do mesta C. Tie sú len dve: $A \xrightarrow{1} C$ a $A \xrightarrow{5} C$.
- Cesty z A do C cez mesto B prechádzajúce úsekom 2. Tie sú štyri: $A \xrightarrow{2} B \xrightarrow{6} C$, $A \xrightarrow{2} B \xrightarrow{7} C$, $A \xrightarrow{2} B \xrightarrow{8} C$ a $A \xrightarrow{2} B \xrightarrow{9} C$.
- Cesty z A do C cez mesto B prechádzajúce úsekom 3. Tie sú štyri: $A \xrightarrow{3} B \xrightarrow{6} C$, $A \xrightarrow{3} B \xrightarrow{7} C$, $A \xrightarrow{3} B \xrightarrow{8} C$ a $A \xrightarrow{3} B \xrightarrow{9} C$.
- Cesty z A do C cez mesto B prechádzajúce úsekom 4. Tie sú štyri: $A \xrightarrow{4} B \xrightarrow{6} C$, $A \xrightarrow{4} B \xrightarrow{7} C$, $A \xrightarrow{4} B \xrightarrow{8} C$ a $A \xrightarrow{4} B \xrightarrow{9} C$.

Výsledok

Počet ciest z mesta A do mesta C je podľa pravidla súčtu rovný číslu $2 + 4 + 4 + 4 = 14$.

Tretie riešenie



To isté ako predchádajúce riešenie, len sa vyhneme vymenovaniu všetkých možností.

Vysvetlenie

Cesty z mesta A do mesta C rozdelíme do štyroch skupín:

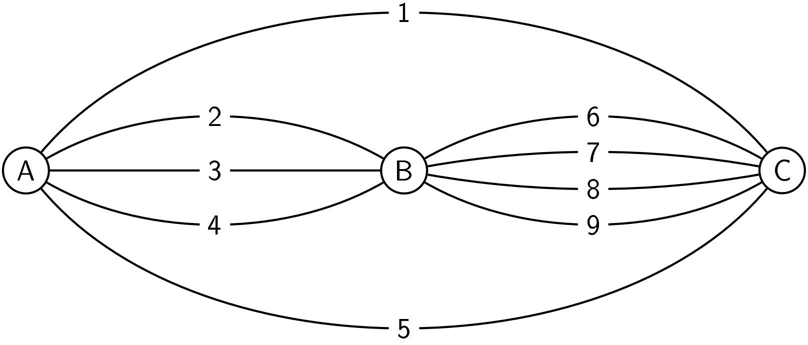
- Priame cesty z mesta A do mesta C. Tie sú len dve.
- Cesty z A do C cez mesto B prechádzajúce úsekom 2. Tie sú štyri.
- Cesty z A do C cez mesto B prechádzajúce úsekom 3. Tie sú štyri.
- Cesty z A do C cez mesto B prechádzajúce úsekom 4. Tie sú štyri.

Výsledok

Počet ciest z mesta A do mesta C je podľa pravidla súčtu rovný číslu

$$2 + 4 + 4 + 4 = 14.$$

Štvrté riešenie



Ešte jedno zjednodušenie: súčin je opakované sčítanie.

Vysvetlenie

Cesty z mesta A do mesta C rozdelíme do dvoch skupín:

- Priame cesty z mesta A do mesta C. Tie sú len dve.
- Cesty z A do C cez mesto B. Tých je podľa pravidla súčinu $3 \cdot 4 = 12$

Výsledok

Počet ciest z mesta A do mesta C je podľa pravidla súčtu rovný číslu

$$2 + 3 \cdot 4 = 14.$$

Pravidlo súčtu
Ak A a B sú disjunktné konečné množiny ($A \cap B = \emptyset$), potom

$$|A \cup B| = |A| + |B| \,.$$

Kombinatorické pravidlo súčtu
Nech A je konečná množina, ktorá sa dá vyjadriť ako zjednotenie navzájom disjunktných množín $A_1, A_2, \dots, A_k$. Potom počet prvkov množiny A je určený súčtom počtov prvkov množín $A_1, A_2, \dots, A_k$:

$$|A| = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_k| \,.$$

Poznámka
Systém $A_1, A_2, \dots, A_k$ pozostáva z navzájom disjunktných množín, ak žiadne dve množiny A_i a A_j, kde $i \neq j$, nemajú spoločný prvok.

Notačná konvencia

Kladieme

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_k = \begin{cases} a_1 & \text{ak } k = 1, \\ 0 & \text{ak } k = 0. \end{cases}$$

Prípad $k = 0$ sa nazýva prázdny súčet.

Pravidlo súčinu

Ak A a B sú konečné množiny, potom

$$|A \times B| = |A| \cdot |B| \,.$$

Kombinatorické pravidlo súčinu (slabá forma)

Nech A je množina k-prvkových postupností takých, že ich prvé prvky vyberáme z konečnej množiny A_1, druhé z konečnej množiny A_2, ..., posledné z konečnej množiny A_k. Potom počet postupností v množine A je určený súčinom počtov prvkov v množinách $A_1, A_2, \dots, A_k$:

$$|A| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \cdots \cdot |A_k| \,.$$

Notačná konvencia

Kladieme

$$a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_k = \begin{cases} a_1 & \text{ak } k = 1, \\ 1 & \text{ak } k = 0. \end{cases}$$

Prípad $k = 0$ sa nazýva prázdny súčin.

Úloha

Uvažujme digitálne hodiny, ktoré sú nastavené na európsky 24-hodinový cyklus. Tie ukazujú denný časový údaj vo formáte

hodiny:minúty:sekundy.

Tak napríklad 01:24:58 je časový údaj, ktorý sa na takýchto hodinách môže vyskytnúť. (Je ich $24 \cdot 60 \cdot 60 = 86\,400$.) Spočítajme, koľkokrát za deň sa na hodinách vyskytne časový údaj

$$\mathrm{H}_{10}\mathrm{H}_{01} : \mathrm{M}_{10}\mathrm{M}_{01} : \mathrm{S}_{10}\mathrm{S}_{01}$$

taký, že postupnosť čísel $\mathrm{H}_{10}\mathrm{H}_{01}\mathrm{M}_{10}\mathrm{M}_{01}\mathrm{S}_{10}\mathrm{S}_{01}$ je rýdzo rastúca:

$$\mathrm{H}_{10} < \mathrm{H}_{01} < \mathrm{M}_{10} < \mathrm{M}_{01} < \mathrm{S}_{10} < \mathrm{S}_{01} .$$

Úloha

Uvažujme digitálne hodiny, ktoré sú nastavené na európsky 24-hodinový cyklus. Tie ukazujú denný časový údaj vo formáte

hodiny:minúty:sekundy.

Tak napríklad 01:24:58 je časový údaj, ktorý sa na takýchto hodinách môže vyskytnúť. (Je ich $24 \cdot 60 \cdot 60 = 86\,400$.) Spočítajme, koľkokrát za deň sa na hodinách vyskytne časový údaj

$$\mathrm{H}_{10}\mathrm{H}_{01} : \mathrm{M}_{10}\mathrm{M}_{01} : \mathrm{S}_{10}\mathrm{S}_{01}$$

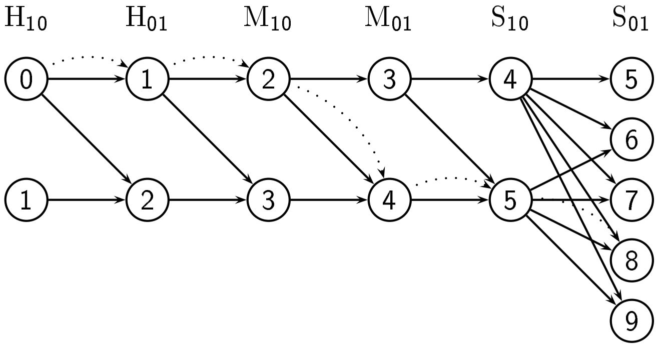
taký, že postupnosť čísel $\mathrm{H}_{10}\mathrm{H}_{01}\mathrm{M}_{10}\mathrm{M}_{01}\mathrm{S}_{10}\mathrm{S}_{01}$ je rýdzo rastúca:

$$\mathrm{H}_{10} < \mathrm{H}_{01} < \mathrm{M}_{10} < \mathrm{M}_{01} < \mathrm{S}_{10} < \mathrm{S}_{01}.$$

Poznámka

Najprv si všimnime, že prvý časový údaj s uvedenými vlastnosťami má tvar 01:23:45, zatiaľ čo posledný takýto údaj má tvar 12:34:59.

Grafická reprezentácia problému



Kombinatorika

Zložitejší príklad

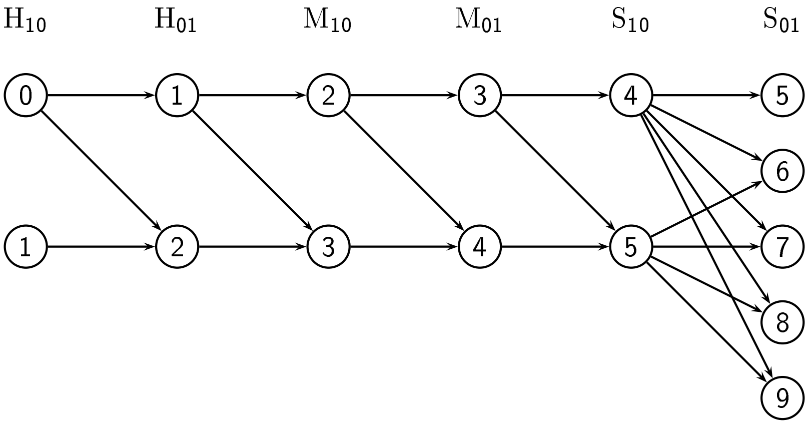
Prvé riešenie

Použijeme pravidlo súčtu.

Kombinatorika

Zložitejší príklad

Grafická reprezentácia problému

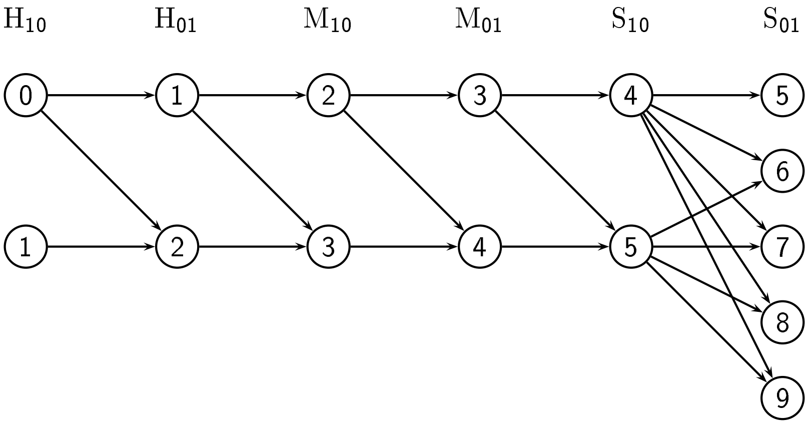


Prvé riešenie

Uvažujeme 6 navzájom disjunktných prípadov:

- Prípad 01 : 23 : 4?. Koľko je ich?
- Prípad 01 : 23 : 5?. Koľko je ich?
- Prípad 01 : 24 :??. Koľko je ich?
- Prípad 01 : 3? :??. Koľko je ich?
- Prípad 02 :?? :??. Koľko je ich?
- Prípad 1? :?? :??. Koľko je ich?

Grafická reprezentácia problému



Prvé riešenie

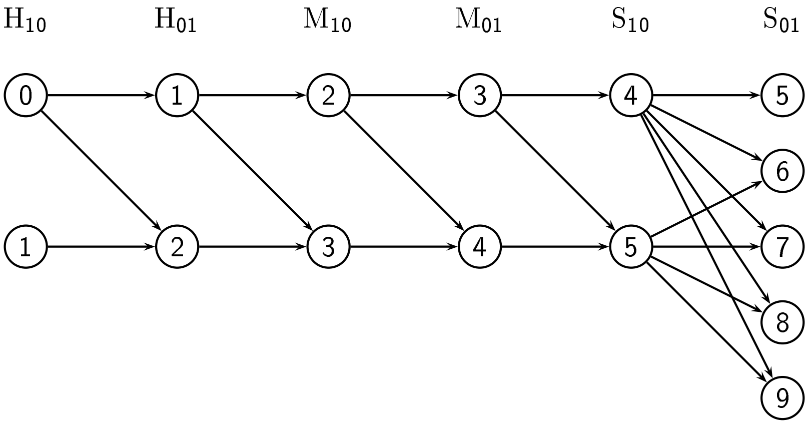
Uvažujeme 6 navzájom disjunktných prípadov:

- Prípad 01 : 23 : 4?. Koľko je ich? Odpoveď: 5.
- Prípad 01 : 23 : 5?. Koľko je ich? Odpoveď: 4.
- Prípad 01 : 24 :??. Koľko je ich? Odpoveď: 4.
- Prípad 01 : 3? :??. Koľko je ich? Odpoveď: 4.
- Prípad 02 :?? :??. Koľko je ich? Odpoveď: 4.
- Prípad 1? :?? :??. Koľko je ich? Odpoveď: 4.

Počet časových údajov s uvedenými vlastnosťami je podľa pravidla súčtu rovný číslu:

$$5 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 25.$$

Grafická reprezentácia problému



Druhé riešenie

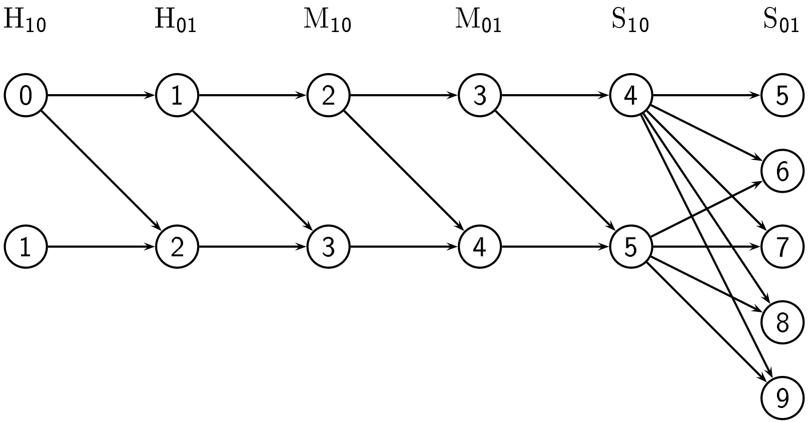
Desiatky sekúnd S_{10} sa musia vyberať spomedzi čísel $\{4, 5\}$. Pre každé také $\mathrm{S}_{10} \in \{4, 5\}$ vyberieme ďalej pätice čísel

$$\mathrm{H}_{10}\mathrm{H}_{01}\mathrm{M}_{10}\mathrm{M}_{01} \quad \mathrm{S}_{01}$$

tak, aby platilo

$$0 \leq \mathrm{H}_{10} < \mathrm{H}_{01} < \mathrm{M}_{10} < \mathrm{M}_{01} < \mathrm{S}_{10} < \mathrm{S}_{01} \leq 9.$$

Grafická reprezentácia problému



Druhé riešenie

Desiatky sekúnd S_{10} sa musia vyberať spomedzi čísel $\{4, 5\}$. Pre každé také $\mathrm{S}_{10} \in \{4, 5\}$ vyberieme ďalej pätice čísel

$$\mathrm{H}_{10}\mathrm{H}_{01}\mathrm{M}_{10}\mathrm{M}_{01} \quad \mathrm{S}_{01}$$

tak, aby platilo

$$0 \leq \mathrm{H}_{10} < \mathrm{H}_{01} < \mathrm{M}_{10} < \mathrm{M}_{01} < \mathrm{S}_{10} < \mathrm{S}_{01} \leq 9.$$

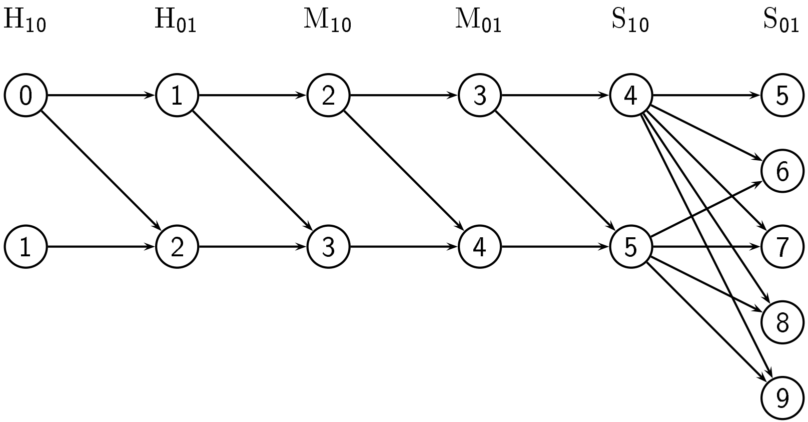
Ak $\mathrm{S}_{10} = 4$:

$$0 \leq \mathrm{H}_{10} < \mathrm{H}_{01} < \mathrm{M}_{10} < \mathrm{M}_{01} < 4 < \mathrm{S}_{01} \leq 9,$$

tak počet takýchto výberov je rovný 5, pretože vtedy musí platiť

$$\mathrm{H}_{10} = 0 \text{ a } \mathrm{H}_{01} = 1 \text{ a } \mathrm{M}_{10} = 2 \text{ a } \mathrm{M}_{01} = 3 \text{ a } 5 \leq \mathrm{S}_{01} \leq 9.$$

Grafická reprezentácia problému



Druhé riešenie

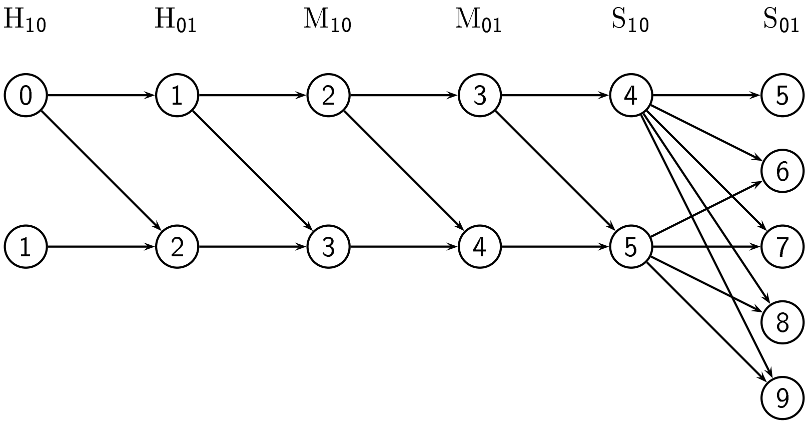
Desiatky sekúnd S_{10} sa musia vyberať spomedzi čísel $\{4, 5\}$. Pre každé také $S_{10} \in \{4, 5\}$ vyberieme ďalej pätice čísel

$$H_{10}H_{01}M_{10}M_{01} \quad S_{01}$$

tak, aby platilo

$$0 \le H_{10} < H_{01} < M_{10} < M_{01} < S_{10} < S_{01} \le 9.$$

Grafická reprezentácia problému



Druhé riešenie

Desiatky sekúnd S_{10} sa musia vyberať spomedzi čísel $\{4, 5\}$. Pre každé také $\mathrm{S}_{10} \in \{4, 5\}$ vyberieme ďalej pätice čísel

$$\mathrm{H}_{10}\mathrm{H}_{01}\mathrm{M}_{10}\mathrm{M}_{01} \quad \mathrm{S}_{01}$$

tak, aby platilo

$$0 \leq \mathrm{H}_{10} < \mathrm{H}_{01} < \mathrm{M}_{10} < \mathrm{M}_{01} < \mathrm{S}_{10} < \mathrm{S}_{01} \leq 9.$$

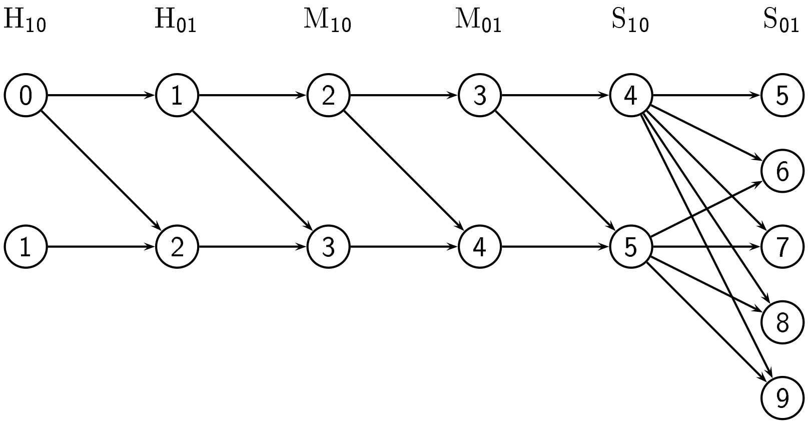
Ak $\mathrm{S}_{10} = 5$:

$$0 \leq \mathrm{H}_{10} < \mathrm{H}_{01} < \mathrm{M}_{10} < \mathrm{M}_{01} < 5 < \mathrm{S}_{01} \leq 9,$$

tak počet možností takýchto výberov je podľa pravidla súčinu rovný číslu $5 \cdot 4 = 20$, pretože vtedy musí platiť

$$0 \leq \mathrm{H}_{10} < \mathrm{H}_{01} < \mathrm{M}_{10} < \mathrm{M}_{01} \leq 4 \text{ a } 6 \leq \mathrm{S}_{01} \leq 9.$$

Grafická reprezentácia problému



Druhé riešenie

Desiatky sekúnd S_{10} sa musia vyberať spomedzi čísel $\{4, 5\}$. Pre každé také $\mathrm{S}_{10} \in \{4, 5\}$ vyberieme ďalej pätice čísel

$$\mathrm{H}_{10}\mathrm{H}_{01}\mathrm{M}_{10}\mathrm{M}_{01} \quad \mathrm{S}_{01}$$

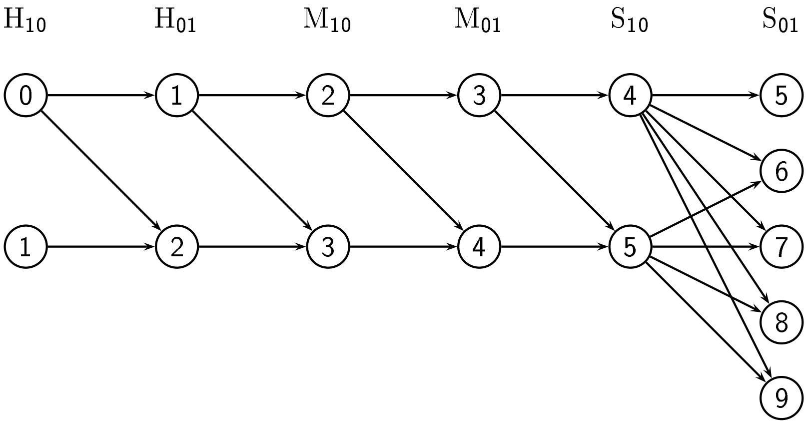
tak, aby platilo

$$0 \leq \mathrm{H}_{10} < \mathrm{H}_{01} < \mathrm{M}_{10} < \mathrm{M}_{01} < \mathrm{S}_{10} < \mathrm{S}_{01} \leq 9.$$

Počet časových údajov s požadovanými vlastnosťami je podľa pravidla súčtu rovný číslu

$$5 + 5 \cdot 4 = 25.$$

Grafická reprezentácia problému



Úloha

Koľko rôznych 6-písmenkových slov možno vytvoriť s použitím (všetkých) písmen slova LOGIKA?

Riešenie

Úloha

Koľko rôznych 6-písmenkových slov možno vytvoriť s použitím (všetkých) písmen slova LOGIKA?

Riešenie

- Prvé písmeno môžeme vybrať 6 spôsobmi.
- Pre každý výber prvého písmena druhé písmeno môžeme vybrať 5 spôsobmi.
- Pre každý výber prvého a druhého písmena tretie písmeno môžeme vybrať 4 spôsobmi.
- ...
- Nakoniec pre každý výber prvých piatich písmen posledné šieste písmeno môžeme vybrať už len jediným spôsobom.

Hľadaný počet je rovný číslu:

$$6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720.$$

Číslo 720 sa nazýva faktoriál čísla 6 a označujeme ho 6!.

Faktoriál

Faktoriálom prirodzeného čísla n rozumieme číslo $n!$ také, že

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

Kladieme $1! = 1$ a $0! = 1$.

Kombinatorické pravidlo súčinu

Nech A je množina k-prvkových postupností takých, že

- prvé prvky takýchto postupností vyberáme n_1 spôsobmi,
- pre každý výber prvého prvku ich druhé prvky vyberáme n_2 spôsobmi,
- pre každý výber prvého a druhého prvku ich tretie prvky vyberáme n_3 spôsobmi,
- $\ldots$,
- nakoniec pre každý výber prvých $k-1$ prvkov ich posledné prvky vyberáme n_k spôsobmi.

Potom počet postupností v A je rovný súčinu

$$n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \cdots \cdot n_k \equiv n_1 n_2 n_3 \ldots n_k.$$

Základné informácie o predmete

Všeobecné informácie o kurze

https://dai.fmph.uniba.sk/courses/dmat/

- Informačný list predmetu:
  - sylabus predmetu,
  - literatúra.
- Výučba v predošlých rokoch.

Výučba tento semester

https://dai.fmph.uniba.sk/courses/dmat/2324zs/

- Novinky.
- Organizácia predmetu.
- Domáce úlohy.
- Semestrálne testy: 6. týždeň 25.X a 11. týždeň 29.XI o 18.10 v poslucharni A a B.
- Pravidlá: podmienky na absolvovanie predmetu.

Základné informácie o predmete

Prednášky

- Prednáška: pondelok 9.00 2h A.
- Učiteľ: Ján Komara, m. I-16, jan.komara@fmph.uniba.sk.
- Konzultácie:
  - pondelok 14.30 - 15.00, m. I-16;
  - piatok okolo 13.00, online.

Cvičenia a kurzy (malá prednáška/cvičenie)

- 1AIN1 (Komara): utorok 14.50 2h M-X, streda 8.10 2h M-VI.
- 1AIN2 (Náther): utorok 14.00 2h M-III, streda 8.10 2h M-IX.
- 1AIN3 (Markošová): utorok 14.50 2h M-VI, štvrtok 11.30 2h F1-328.
- 1AIN4 (Komara): utorok 11.30 2h M-X, streda 14.00 2h M-X.
- 1AIN5 (Mihálik): utorok 11.30 2h M-XI, streda 16.30 2h M-I.

Základné informácie o predmete

Hodnotenie počas semestra

- Počas semestra môžete dohromady získať 150 bodov.
  - 1. a 2. semestrálny test: 2 x 40 bodov.
  - Domáce úlohy: 40 bodov.
  - Cvičenia: 40 bodov.
  - Prémiové hodnotenie (aktivita na cvičeniach, ...).
- Požiadavka priebežného semestrálneho hodnotenia: 75 bodov.

Skúškové obdobie

- Skúška pozostáva z písomnej (150 bodov) a ústnej časti (teoretická otázka pre hodnotenie A, B).
- Menej ako 75 bodov z písomky: skúška sa musí opakovať.

Celkové hodnotenie

- Dohromady možno získať 300 bodov.
- Známky: E 50% (150 bodov), D 60%, C 70%, B 80%, A 90%.

Základné informácie o predmete

Distančná výučba

- Základné informácie
  - link: https://uniba.sk/elearning
- Moodle
  - domáce úlohy
  - link: https://moodle.uniba.sk
  - kurz: 1-AIN-121 Diskrétna matematika (1) ZS 2023/24
  - heslo: dmat20232024
- MS Teams
  - konzultácie
  - link: https://teams.microsoft.com
  - kurz: 1-AIN-121 Diskrétna matematika (1) ZS 2023/24
  - kód: 21dw746

Záver

Cvičenie a kurz

- Permutácie bez opakovania a s opakovaním.
- Variácie bez opakovania a s opakovaním.
- Ďalšie typy usporiadaných výberov.

Organizácia predmetu

- Konzultácie:
  - dnes o 14:30, m. I-16;
  - v piatok okolo 13:00, online (spresnenie večer predtým).

Záver

Otázky

- Ak máte otázku, tak zdvihnite ruku.

Koniec prednášky