FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
UNIVERZITY KOMENSKÉHO
ÚSTAV INFORMATIKY

Martin Macko

# Kvalitatívne usudzovanie v ekonómii

DIPLOMOVÁ PRÁCA

BRATISLAVA 2008

Čestne prehlasujem, že som túto diplomovú prácu vypracoval samostatne s použitím citovaných zdrojov.

…...................................

## Poďakovanie

Ďakujem môjmu diplomovému vedúcemu RNDr. Martinovi Takáčovi za trpezlivosť, vedenie a cenné rady pri písaní tejto práce. Ďalej sa chcem poďakovať prof. RNDr. Pavlovi Brunovskému DrSc. za neoceniteľnú pomoc pri zorientovaní sa v ekonomických vedách. V neposlednom rade sa chcem poďakovať svojej rodine a priateľom za podporu počas môjho štúdia.

## Abstract

V práci sa zaoberáme skúmaním možností aplikovania kvalitatívneho usudzovania na ekonomické teórie. Na základe nich vytvárame kvalitatívne modely a hodnotíme ich vyjadrovaciu silu, vzhľadom na poznatky z týchto teórií. Rovnako rozoberáme analógie medzi našimi ekonomickými modelmi a už klasifikovanými fyzikálnymi modelmi. Popísané modely vychádzajúce z mikroekonomickej teórie: firma, spotrebiteľ, trh, monopol a dlhodobá rovnováha trhu. Modely vychádzajúce z makroekonómie: Solowov model rastu. Model rozdelenia pozemkov vychádza zo vzťahov popísaných v predchádzajúcich modeloch a odpozorovaných ekonomických procesov v réalnom svete.



## Kľúčové slová

kvalitatívne usudzovanie, simulácia, znamienkové digrafy, mikroekonómia, Solowov model rastu

# Obsah

# 1. Úvod

### 1.1.1. Podstata kvalitatívneho prístupu

Ľudia si vždy uvedomovali, že svet, ktorý ich obklopuje sa riadi podľa určitých prírodných zákonov. Porozumenie týmto vzťahom prináša možnosti ako uplatniť tieto poznatky pri riešení reálnych problémov. Pretože realita je príliš komplexná potrebujeme sa sústrediť len na určité jej celky, ktoré sa navzájom ovplyvňujú. Súbor týchto celkov nazveme *systém*. Systém, ktorý popisuje tieto závislosti od času sa nazýva *dynamický*. Pri skúmaní systémov musíme abstrahovať od nepodstatných vlastností a sústrediť sa len na podstatné vlastnosti systému, ktoré sú dôležité z pohľadu, z ktorého chceme systém skúmať – vytvárame *model* systému. Pri vytvorení modelu musíme verne reprezentovať štruktúru systému, ktorý modelujeme, aby boli výsledky analýzy alebo simulácie modelu relevantné pre správanie sa modelovaného systému.

Vo fyzike nám diferenciálne rovnice umožňujú vyjadriť vzťahy medzi premennými a zmeny v ich hodnotách v priebehu času. Vytvorenie takýchto modelov môže byť náročné, pretože nemusíme byť vždy schopní verne popísať tieto vzťahy pomocou matematických funkcií (alebo takto vytvorený systém nedokážeme vyriešiť analyticky) a aj keď takýto model máme, pri simulácii môžeme naraziť na problém so získaním dát pre začiatočný stav. Vyjadrovaciu silu týchto modelov však môžeme pri riešení niektorých problémov pokojne oželieť, pretože nepotrebujeme poznať detaily o premenných systému, ale nejaký všeobecnejší výsledok.

Zoberme si napríklad deravé vedro s vodou. Pre fyzikálny model by sme potrebovali poznať množstvo údajov (objem vody vo vedre, plochu dier, …) , ale to, že časom všetka voda vytečie, nám povie aj zdravý rozum. To zistíme bez počítania z prirodzene zrejmého vzťahu: Ak je vedro deravé, voda vyteká. Takto jednoducho sme vyjadrili závislosť medzi hodnotou jednej premennej (plocha diery) a úbytkom hodnoty inej premennej (voda vo vedre). Keď sa zamyslíme môžeme nájsť veľa analógií k tomu vzťahu: Z vykúreného domu uniká teplo, z balóna uniká vzduch, ale napríklad aj keď sa nám míňa kredit pri telefonovaní, alebo sa infláciou zmenšuje kúpna sila.

Týmto prístupom teda môžeme abstrahovať nielen od hodnôt konkrétnych premenných, ale aj od ich interpretácie a takto získať vzory systémov a skúmať ich správanie sa. Toto nám pomôže aj pri názornejšom vysvetľovaní modelov, ktoré sa zaoberajú popisovaním abstraktnejších vzťahov, napríklad ekonomických závislostí. Modelmi vytvorenými na základe tohto prístupu sa zaoberá kvalitatívne usudzovanie.

### 1.1.2. Cieľ práce

Táto práca sa bude zaoberať hlavne možnosťami použitia kvalitatívneho usudzovania v ekonomických vedách, najmä v mikroekonómii, ktorá používa na skúmanie ekonomických vzťahov tiež z časti kvalitatívny prístup. Pomocou modelov a ich analýzy chceme ukázať výhodu tohto prístupu vo väčšej názornosti a zrozumiteľnosti pri popisovaní ekonomických systémov. To, že tieto modely popisujú len štruktúru bez interpretácie premenných, nám umožní vysvetliť niektoré mechanizmy v ekonómii prostredníctvom analógií s fyzikálnymi modelmi popísanými v tom istom formalizme. Tieto prirovnania teda budú jednak názorné a zároveň podopreté teóriou kvalitatívneho usudzovania.

# 2. Prehľadová kapitola

## 2.1. Kvalitatívne usudzovanie

### 2.1.1. Úvod

*Kvalitatívne usudzovanie* sa zaoberá skúmaním opisov reality, ktoré zachovávajú jej podstatné rysy, ale abstrahujú od konkrétnych hodnôt a kvantitatívne vyjadrených vzťahov. Po vytvorení kvalitatívneho modelu, ktorý opisuje správanie určitého dynamického systému, nám kvalitatívne usudzovanie ponúka dva postupy ako z modelu zistiť jeho kvalitatívne správanie.

1. *Kvalitatívnou simuláciou* prostredníctvom šírenia kvalitatívnych hodnôt cez vzťahy definované v modeli vieme skúmať jeho správanie v čase, krok po kroku od zadaného počiatočného stavu. Avšak takáto simulácia často vedie k vetveniu na viaceré stavy, medzi ktorými nevieme rozhodnúť len z čiastkových informácií a teda k mnohoznačnosti výsledkov.
2. *Kvalitatívna analýza* používa iný prístup. Snaží sa získať vlastnosti systému analyzovaním jeho štruktúry. Týmto spôsobom vieme niekedy rozhodnúť o globálnych vlastnostiach modelu ako je napríklad stabilita, ale nedostaneme presné správanie sa systému v čase.

Pre získanie čo najviac informácií o správaní sa systému sa používajú oba pohľady, ktoré nám dajú ucelený popis vlastností systému.

### 2.1.2. Kvalitatívna simulácia

Pri popisovaní štruktúry systému budeme vychádzať zo vzťahovo-orientovaného prístupu (Kuipers)[1], ktorý vyjadruje štruktúru systému pomocou kvalitatívnych premenných a väzieb, ktoré popisujú vzťahy medzi premennými.

Tento prístup je úzko spätý s teóriou diferenciálnych rovníc, ktoré sú používané na

1 Viď. [4], [5]

modelovanie fyzikálnych modelov. Je založený na kvalitatívnej abstrakcii od nich aj preto sa systém vyjadrený týmto formalizmom nazýva QDE (qualitative differential equation). Implementácia algoritmu, ktorý sa používa na simuláciu v tomto modeli, sa nazýva QSIM[2] a modely, ktoré budú prezentované v tejto práci, boli implementované a simulované v tomto formalizme.

Diferenciálne rovnice zachytávajú systém pomocou popísaní spojitých zmien jeho premenných. Pre kvalitatívny popis systému je však len niekoľko hodnôt týchto premenných podstatných a nás zaujíma vzťah premennej k týmto *význačným hodnotám*. Každá význačná hodnota je symbolické meno hodnoty z $\mathbb{R}$ , ktorej presnú hodnotu často nepoznáme. Každá premenná má svoju vlastnú usporiadanú množinu takýchto hodnôt. Nazývame ju *priestor význačných hodnôt*. Väčšinou tento priestor obsahuje aspoň hodnoty $-\infty, 0, \infty$. V každom časovom okamihu vieme vyjadriť hodnotu k*valitatívnej premennej* pomocou hodnoty z tohto priestoru a smeru zmeny tejto premennej v tom časovom okamihu – znamienkom jej derivácie.

Štruktúra systému je vyjadrená vzťahmi medzi premennými, ktoré musia spĺňať v každom časovom okamihu t. Tieto vzťahy popisujú *kvalitatívne väzby* medzi premennými. Sú to vzťahy, ktoré musia byť splnené v každom časovom okamihu. Môžu to byť presné matematické relácie, alebo kvalitatívna abstrakcia niektorých funkcií. Niektoré väzby, ktoré sú založené na matematických vzťahoch:

$$(add\, x\, y\, z) \equiv x(t)+y(t)=z(t) \qquad (mult\, x\, y\, z) \equiv x(t)y(t)=z(t)$$
$$(minus\, x\, y) \equiv y(t)=-x(t) \qquad (d/dt\, x\, y) \equiv \frac{d}{dt}x(t)=y(t)$$

Väzby, ktoré reprezentujú monotónne rastúce (resp. klesajúce) funkcie:

$$(M+\ x\ y) \equiv y(t)=f(x(t)),\ f'(x(t))>0$$
$$(M-\ x\ y) \equiv y(t)=f(x(t)),\ f'(x(t))<0$$

Naše modely budeme znázorňovať prostredníctvom grafického zobrazenia premenných a väzieb. Premenné budeme chápať ako lokálne procesory pospájané väzbami. Toto zobrazenie nám umožní stručne určiť všetky väzby v modeli a jednoducho si predstaviť šírenie hodnôt v modeli pri simulácii.

K týmto väzbám môžu byť pripojené *korešpondencie.* Sú to n-tice význačných hodnôt, ktoré premenné väzby nadobudnú naraz.

2 Viď [6]

*Stav s*ystému je opísaný hodnotami jeho premenných. *Správanie* systému je popísané postupnosťou stavov, v akých sa systém nachádzal v časoch keď niektorá z jeho premenných nadobudla význačnú hodnotu, a stavov systému v časových intervaloch medzi týmito *význačnými okamihmi.*

Simulácia na takto popísanom modeli je proces odvodenia opisu možných správaní systému zo zadaného počiatočného stavu. Toto robíme pomocou riešenia kvalitatívnych ohraničení. Podľa väzieb sa snažíme odvodiť hodnoty ostatných premenných a určujeme možné nasledujúce stavy systému podľa hodnôt derivácií premenných v danom stave. Na riešenie týchto úloh bol popísaný algoritmus QSIM. Jeho vstupom je popis systému väzbami - QDE a počiatočný stav systému (nemusí byť úplne popísaný – QSIM dokáže stav na základe väzieb skompletizovať). Výsledkom simulácie algoritmom QSIM je vygenerovaný s*trom správaní* s koreňom v počiatočnom stave (resp. *les* – ak počiatočný stav nebol úplný a jeho zúplnenie vygenerovalo viac stavov). Stavy, v ktorých sú derivácie všetkých premenných nulové sa nazývajú *ekvilibriá.* Sú to rovnovážne stavy systému, z ktorých sa už hodnoty premenných nemenia.

### 2.1.3. Kvalitatívna analýza

Na skúmanie globálnych vlastností systému sa používajú prostriedky matematickej teórie dynamických systémov. *Stav* systému v ľubovoľnom čase *t* môžeme opísať n-ticou premenných času ($x_1$, … , $x_n$). Premenné, ktoré plne vyjadrujú stav systému budeme nazývať *fázové.* Premenné, ktoré sú dané „zvonka“ a nemenia sa v závislosti od ostatných premenných systému nazveme *exogénne.* Všetky ostatné sa od týchto dajú odvodiť, tieto budeme nazývať *odvodené.* Karteziánskym *s*účinom oborov hodnôt fázových premenných dostaneme *fázový priestor.* Body tohto priestoru reprezentujú možné stavy systému. Ako sa systém vyvíja v čase môžeme jeho stavy vyznačiť v tomto priestore a dostať tak *trajektóriu.* Z vlastností týchto trajektórií možno zistiť kvalitatívne správanie sa systému.

V exaktných matematických modeloch vyjadrujeme zmenu fázových premenných diferenciálnymi rovnicami tvaru:

$$\vec{x}' = f(\vec{x}, \vec{c}, t)$$

kde

$\vec{x}$ - vektor fázových premenných

$\vec{c}$ - vektor exogénnych premenných

$t$ - reprezentuje čas

$f$ - ľubovoľná vektorová funkcia

Kvalitatívne formalizmy nereferencujú čas explicitne a exogénne premenné sú považované za fixne dané. Takže dostávame *autonómny* systém, ktorého správanie závisí iba od hodnôt fázových premenných:

$$x_i' = f_i(x_i, \ldots, x_n) \quad i = 1, \ldots, n$$

kde

$x_i'$ - derivácia fázovej premennej $x_i$ podľa času.

$f_i$ - funkcia vyjadrujúca závislosť zmeny fázovej premennej i od ostatných premenných

Lineárny systém teda vieme popísať vektorovou rovnicou

$$\vec{x}' = A\vec{x} \quad A \in R^{nxn}$$

kde

$\vec{x}'$ – je vektor zmien vo fázových premenných

$A$ – je matica, vytvorená podľa funkcií $f_i$

$\vec{x}$ – je vektor fázových premenných

Nelineárny systém vieme v lokálnom okolí bodu $\vec{x}^*$ aproximovať lineárnym systémom $\vec{x}^{*\prime} = J_{\vec{x}*} \cdot \vec{x}^*$ , kde $J_{\vec{x}*}$ je *Jacobiho* matica v bode $\vec{x}^*$.

(Jacobiho matica - $J_{\vec{x}*} = (a_{i,j})_{i,j=1}^{n} \quad a_{i,j} = \dfrac{\partial f_i(\vec{x}*)}{\partial x_j}$ )

*Ekvilibriá* sú tie body, v ktorých je každá zmena nulová $(f_i(\vec{x}) = 0 \quad \forall i)$ . Podľa topologických vlastností rozdeľujeme ekvilibriá do 4 kategórií.

**Stoka (sink):** trajektórie do ekvilibria vstupujú

**Žriedlo (source):** trajektórie z ekvilibria vystupujú

**Sedlo (saddle):** niektoré trajektórie do ekvilibria vstupujú, iné vychádzajú.

**Centrum (center):** trajektórie ani nevstupujú ani nevystupujú.

Stabilita systému v ekvilibriu popisuje jeho zmenu vzhľadom na malú výchylku od hodnoty v bode ekvilibria. Ak sa systém vždy vráti do ekvilibria je stabilné ekvilibrium (stoka). Ak sa vždy vzdiali, tak je nestabilné (žriedlo). V niektorých prípadoch môže správanie sa systému závisieť od smeru výchylky vo fázovom priestore. Teda pre zmenu premennej v určitom smere sa systém vráti do rovnováhy a pre zmenu v iných smeroch sa vzdiali z rovnovážneho bodu (sedlo). Systém môže po vychýlení aj oscilovať okolo ekvilibria (centrum).

Stabilitu lineárnych systémov vieme určiť z vlastných čísel matice, ktorá systém popisuje. Pri kvalitatívnom modelovaní však tieto údaje nemáme. Namiesto matice s kvantitatívnymi hodnotami máme maticu, ktorá má hodnoty z {+, -, 0}. Takúto maticu nazývame *znamienkovou.* Ak má prvok $a_{i,j}$ hodnotu + ( - ) znamená to, že premenná $j$ vplýva na premennú $i$ kladne (záporne). Ak má prvok $a_{i,j}$ hodnotu 0, premenná $j$ nevplýva na premennú $i$. Takáto matica predstavuje vzor a dosadením čísel za jednotlivé prvky dostaneme maticu, konkrétneho systému. Vlastnosť, ktorá platí pre všetky matice spĺňajúce vzor daný jednou znamienkovou maticou, sa nazýva *znamienková*.

Na reprezentáciu systému môžeme použiť *znamienkové digrafy.* Sú to orientované grafy s hranami označenými znamienkami. Tieto grafy nám opisujú celú triedu systémov so spoločnou znamienkovou maticou. Vrcholy zodpovedajú premenným a hrany reprezentujú vplyvy premenných. Orientovaná hrana z vrchola $j$ do vrcholu $i$ má hodnotu určenú podľa prvku $a_{i,j}$ zo znamienkovej matice. Ak vyjadrujeme zmenu premennej, ktorá nastane deriváciou, hovoríme o *fázovom posune*. Značíme ho dvoma čiarami pri hlave šípky.

Keďže odvodené premenné sa dajú vyjadriť pomocou fázových a exogénnych, môžeme systém prepísať na vyjadrenie stavu bez odvodených premenných. *Kánonický digrafy* je digraf, ktorý dostaneme z takto upraveného systému. Môžeme sa naň dívať aj tak, že z digrafu odstránime všetky odvodené premenné a zjednotíme ich vplyvy na fázové premenné. Pri transformácii začíname od premenných, do ktorých vstupujú hrany s fázovým posunom a postupujeme proti smeru hrán, až pokým neskončíme v exogénnej alebo fázovej premennej. Hodnoty na hranách sčítavame podľa znamienok (dve kladné alebo záporné vplyvy dávajú kladný vplyv a záporný s kladným vplyvom dávajú negatívny vplyv)[3] Takže v kanonickom digrafe máme len fázové a exogénne premenné a všetky vplyvy sú fázové posuny. Môže sa stať, že medzi dvoma premennými je viac ciest a teda v kanonickom digrafe bude výsledný vplyv spočívať v súčte (kvantitatívnom) viacerých ciest. Toto je niekedy problém, pretože ak existujú na jednu premennú kladné aj záporné vplyvy, nevieme presne určiť výsledný vplyv bez ďalších predpokladov na veľkosti týchto vplyvov.

Analyzovaním týchto digrafov a ich matíc sa podarilo klasifikovať niektoré modely a identifikovať niektoré podmienky, ktoré musí systém spĺňať, aby sa dalo rozhodnúť o jeho stabilite.[4] Tieto výsledky budeme používať pri analýze modelov, ktoré vytvoríme.

Vo všeobecnosti je znamienková stabilita veľmi silná vlastnosť a preto niektoré modely nevieme klasifikovať len zo znamienok. Výsledok niekedy závisí od pomeru magnitúd niektorých prvkov a trieda systémov nemusí mať jednotné správanie ohľadom stability.

### 2.1.4. Ekonomické podklady pre modely

Fyzika popisuje zákonitosti v reálnom svete diferenciálnymi rovnicami na základe, ktorých sa kvalitatívnou abstrakciou vytvárajú kvalitatívne modely fyzikálnych dejov. Pri snahe o aplikáciu podobného prístupu v ekonómii, musíme nájsť teoretické pozadie, ktoré nám poskytne podklad pre naše modely. Ekonómia obsahuje viac teórií, ktoré sa snažia popísať procesy a závislosti, ktoré ovplyvňujú chod ekonomiky. Líšia sa pohľadom a predpokladmi, z ktorých vychádzajú. Pre naše potreby bude najvhodnejšia mikroekonomická teória. Na rozdiel od makroekonómie, ktorá pozná viacero prístupov (napríklad klasický, keynesovský), je pomerne jednotná. Zaoberá sa racionálnym správaním elementárnych ekonomických subjektov (firma, spotrebiteľ) v trhovom

3 Viď [2]

4 Viď [7]

prostredí a snaží sa odvodiť závery o vývoji ekonomiky ako celku. Na základe tejto teórie uvedieme päť modelov (firma, spotrebiteľ, trh, dlhodobá rovnováha trhu a monopol). V ďalšej časti uvedieme jeden rozsiahlejší model odvodený na základe makroekonomickej teórie rastu (Solowov model rastu). Na záver uvedieme model, ktorý sa nebude opierať o teóriu, ale bude vychádzať z reálneho pozorovania sveta s využitím zadefinovaných mikroekonomických vzťahov.

Vzťahy a predpoklady ekonomických teórií boli čerpané z publikácií uvedených v použitej literatúre. Cieľom tejto práce je ukázať možnosti „prekladu“ týchto vzťahov do formalizmu kvalitatívneho usudzovania a nie rozoberanie týchto vzťahov. Preto budú všetky mikro a makro-ekonomické vzťahy brané bez zasahovania do ich definícií. Výnimku tvoria modely dlhodobej rovnováhy trhu a rozdelenia pozemkov, pretože boli vytvorené na základe už preskúmaných vzťahov bez priamej opory v literatúre. Tieto dva modely tvoria najvýraznejšie výsledky práce, pretože demonštrujú spôsob, akým sa dajú vytvárať modely, ktoré popisujú realitu jednoducho a súlade s matematicky podloženými teóriami.

# 3. Kvalitatívny model pre umývadlo

## 3.1. Úvod

V tejto práci budeme vychádzať zo vzťahovo-orientovaného prístupu ku kvalitatívnemu usudzovaniu. Tento prístup sa nazýva aj kvalitatívna matematika, pretože spočíva v kvalitatívnej abstrakcii diferenciálnych rovníc. Medzi výhody tohto prístupu patrí jasná formalizácia, implementovanie simulačného algoritmu a najmä úzke prepojenie na teóriu diferenciálnych rovníc. Vďaka posledne menovanej výhode sú fyzikálne modely obzvlášť vhodné na modelovanie týmto prístupom. Cieľom tejto práce bude preskúmať možnosti aplikácie kvalitatívneho usudzovania v abstraktnejšej oblasti – ekonómii a ukázať, výhody systémového myslenia pri snahe pochopiť dynamiku týchto modelov. Pretože budeme často používať analógiu s fyzikálnymi modelmi uvádzame podrobnejšie model umývadla, ktorého štruktúru budú zdielať mnohé ekonomické modely.

### 3.1.1. Fyzikálne pozadie modelu

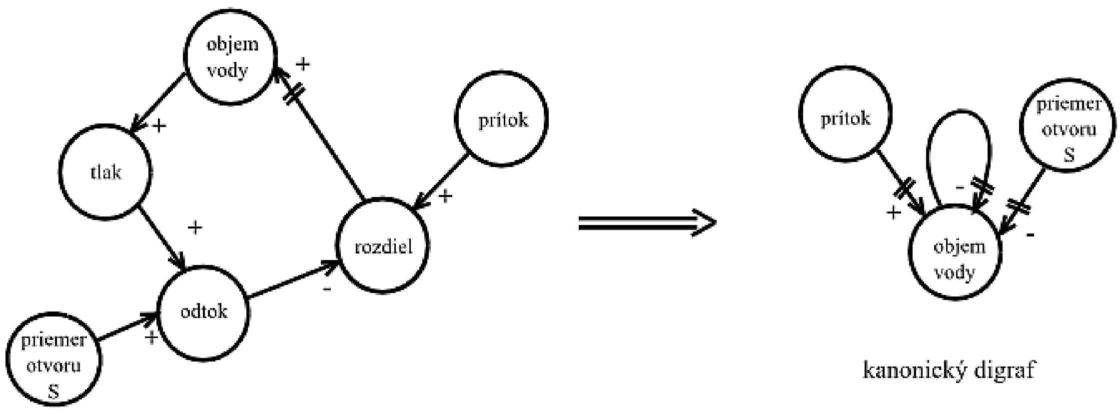
Umývadlo si predstavujeme ako nádobu, do ktorej zvrchu voda priteká a zospodu odteká. Rýchlosť odtoku závisí od priemeru otvoru a tlaku, ktorý voda vytvára. Tlak voda vytvára svojou váhou, to znamená čím je vody v umývadle viac, tým väčší tlak pôsobí. Tlak nepotrebujeme presne vyčísliť, stačí nám opísať tento vzťah kvalitatívnou väzbou $M^+$. Zmena objemu vody v umývadle závisí od rozdielu množstva vody, ktorá pritiekla a tej ktorá odtiekla. Odtekajúca voda je daná tlakom a priemerom otvoru na dne umývadla S. Vyjadrené kvalitatívnou diferenciálnou rovnicou:

$$V' = prítok - S \cdot M^+(V)$$

### 3.1.2. Kvalitatívna simulácia správania sa modelu

Počiatočný stav je prázdne umývadlo s nenulovým prítokom. Umývadlo sa začne napúšťať, stúpa hladina vody v umývadle a pretože rastie tlak a tým aj odtok, nakoniec dospeje do stavu kde rovnaké množstvo vody pritečie aj odtečie, čiže celkové množstvo vody v umývadle sa nemení. Takýto stav nazývame ekvilibriovým. Ak budeme brať ako predpoklad obmedzenú kapacitu umývadla, môžu nastať tri prípady. Prvý je, že množstvo vody, pri ktorom by sa odtok vyrovnal prítoku, je väčšie ako kapacita umývadla – umývadlo pretečie. Druhý je, že rovnovážny stav nastane práve pri naplnení a posledný stav je, že sa rovnováha dosiahne na úrovni objemu, ktorý je niekde pod maximálnou kapacitou.

### 3.1.3. Kvalitatívna analýza stability modelu




Pod stabilitou ekvilibria sa rozumie reakcia systému na malé zmeny hodnôt (perturbácie) fázových premenných. Zo znázornenia digrafu pre uvedený model a z klasifikácie znamienkových modelov vyplýva, že model má stabilné ekvilibrium (*sink - stoka*). To znamená, že ak zmeníme objem vody v umývadle, ktoré je v rovnovážnom stave, vráti sa hladina naspäť na ekvilibriovú úroveň. Ak chceme zväčšiť množstvo vody v umývadle v ekvilibriu, musíme zmeniť niektorú exogénnu premennú – zvýšiť prítok alebo zmenšiť otvor odtoku. (Pre zmenšenie rovnovážnej hladiny treba upraviť premenné opačným spôsobom). Toto správanie je spoločné pre všetky modely, ktoré zdieľajú tento znamienkový digraf a na túto úvahu sa budeme odvolávať pri úvahách o modeloch s rovnakou znamienkovou štruktúrou.

# 4. Kvalitatívny model firmy

## 4.1. Základ – Mikroekonomická teória

Nasledujúce definície a vzťahy vychádzajú z použitej literatúry[5] Z rovnakého zdroja čerpajú aj ostatné modely, založené na mikroekonomickej teórii.

### 4.1.1. Teória firmy

Firmu si budeme predstavovať ako "čiernu" skrinku, ktorá zo vstupov (*faktory*) vyrába nejakým spôsobom výstupy (*výrobky*). Pre zjednodušenie budeme predpokladať, že firma vyrába jeden typ výrobku. Zvoľme časovú jednotku. *Technológiou* budeme nazývať vektor $z=(x_1, .., x_n, y)$ kde $x_1, ..., x_n$ sú objemy faktorov, ktoré spotrebujeme na vyrobenie výrobkov v množstve $y$, za zvolenú jednotku času. Firma je charakterizovaná *množinou možných technológií Y*. Jej body sú dvojice $(\vec{x}, y)$ kde $\vec{x}$ je vektor faktorov a $y$ je množstvo výrobkov, ktoré z nich firma dokáže vyrobiť. *Produkčnou funkciou* nazveme funkciu:

$$f : R^n \rightarrow R \; ; f(\vec{x}) = supremum\{y : (\vec{x}, y) \in Y\}$$

Táto funkcia vyjadruje aké je najväčšie množstvo výrobkov, ktoré dokáže firma vytvoriť z daných faktorov. Je monotónne rastúca, konkávna (čiže aj spojitá) a platí $f(0) = 0$. Uvedené vlastnosti produkčnej funkcie vyplývajú z jej definície v mikroekonómii.

### 4.1.2. Racionálne správanie firmy

Racionálne spravajúca sa firma sa snaží maximalizovať svoj zisk. Budeme predpokladať, že pôsobí v kompetitívnom prostredí, to znamená, že má tak veľa konkurenčných firiem, že ceny faktorov a výrobkov na trhu sú dané a nezávisia od aktivít firmy. Zisk firmy pri technológii $(\vec{x}, y)$ je:

5 Viď [8], [9]

$$Zisk = py - \sum_{i=1}^{n} w_i x_i = py - \langle w, x \rangle$$

kde za exogénne premenné považujeme premenné

- $p$ ... cena výrobku na trhu
- $w_i$ ... cena faktoru i na trhu

Keďže predpokladáme racionálne správanie firmy, ktoré sa snaží maximalizovať zisk, stojí firma pred dvoma úlohami: a) Minimalizovať náklady pri danej hladine výroby a b) určiť objem výroby, ktorý produkuje najväčší zisk. Najprv sa zameriame na vyjadrenie najmenších nákladov. Máme dané množstvo výrobkov, ktoré chceme vyrobiť $y$ a ceny faktorov $w_i$, snažíme sa nájsť také $\vec{x}_{opt}$ , pre ktoré platí:

$$f(\vec{x}_{opt}) \geq y \ \wedge \ \langle w, \vec{x}_{opt} \rangle = minimum\{\langle w, \vec{x} \rangle : f(\vec{x}) \geq y\}$$

V úlohe môžeme bez újmy na všeobecnosti nerovnosť nahradiť rovnosťou $f(x) = y$. Z vlastností produkčnej funkcie $f$ sa dá odvodiť, že ak v množine možných technológií existuje nenulový počet vektorov $\vec{x}$ spĺňajúcich podmienku, tak z nich vieme jednoznačne vybrať minimálne riešenie. Na základe toho definujeme *nákladovú funkciu.*

$$C(y) = C(y, w) = \langle w, x_{opt}(w, y) \rangle$$

Táto funkcia pre dané množstvo výrobkov, ktoré chceme vyrobiť, určí náklady pri použití optimálnej technológie. Z priebehu produkčnej funkcie vieme odvodiť, že nákladová funkcia je konvexná.[6] Túto vlastnosť využijeme neskôr ako dôležitý predpoklad. Vo všeobecnosti je úloha minimalizácie nákladov dosť zložitá, pretože sa berú do úvahy rôzne vzťahy medzi faktormi (napríklad či dokážeme nahradiť jeden faktor druhým a podobne). Pre potreby našich modelov abstrahujeme od týchto rozdielov a budeme považovať túto úlohu za ošetrenú nákladovou funkciou. Zároveň budeme pre jednoduchosť predpokladať, že používame pri výrobe len jeden faktor a uvažovať teda len o jednej cene $w$..

Teraz sa môžeme zamerať na druhú časť úlohy a to určenie objemu výroby, ktorý produkuje maximálny zisk pre firmu pri danej cene výrobku a faktoru.

S pomocou nákladovej funkcie preformuluje vyjadrenie zisku firmy:

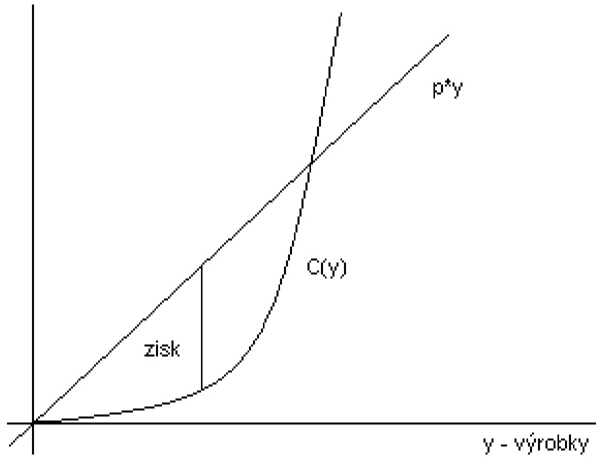
6 Je to predpoklad mikroekonomickej teórie – viď [8] [9]

$$Zisk(y) = py - C(y, w)$$

Takže hľadáme maximum funkcie *Zisk(y)*, pre ktoré musí platiť že derivácia $Z'(y) = 0$, čiže

$$Zisk'(y) = p - C'(y, w) = 0$$

Pretože rast nákladov sa s množstvom produktov, ktoré firma vyrába zrýchľuje[7], existuje práve jeden objem výroby, pri ktorom dosahuje firma maximálny možný zisk vzhľadom na ceny na trhu. Tu sme využili konvexnosť nákladovej funkcie. Z priebehu tejto funkcie je tiež zrejmé, že jej derivácia je rastúca v závislosti od počtu výrobkov *y*.



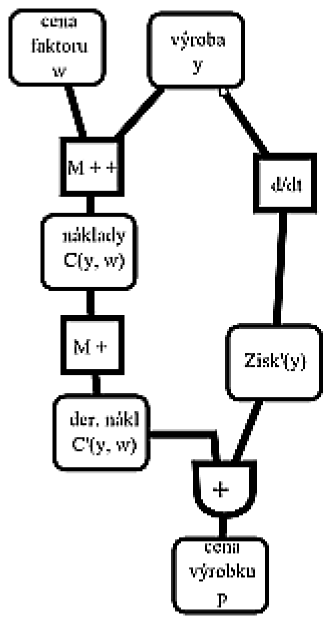

Na základe popísaných vzťahov vytvoríme model firmy. Treba poznamenať, že mikroekonomická teória nepredpokladá beh času pri predošlých úvahách. Jej prístup je statický a predpokladá, že pri zmene parametrov sa nové optimálne hodnoty nastavia okamžite. Modely, ktoré použijeme, sú postavené na spojitom čase a spojitých zmenách premenných. V reálnom svete rozhodnutia firiem o zmene výroby nie sú spojité, ale diskrétne. Ako uvidíme, výsledky čo sa týkajú správania pri perturbáciách, budú rovnaké a či sa zmeny od nich závisiace udejú postupne alebo jedným diskrétnym krokom nie je dôležité z nášho hľadiska.

7 Opäť predpoklad teórie – [8], [9]

# 4.2. Kvalitatívny model firmy pre QSIM

## 4.2.1. Väzby modelu

Na uvedených matematických vzťahoch vykonáme kvalitatívnu abstrakciu čím dostaneme vyjadrenie modelu v kvalitatívnych rovniciach. Závislosť nákladov od ceny faktora a počtu vyrábaných produktov vyjadríme väzbou $M^{++}$. Väzbou $M^{+}$popíšeme vývoj hodnoty derivácie nákladov v závislosti od nákladov. Touto väzbou vyjadríme konvexný priebeh nákladovej funkcie. Rozdiel medzi cenou a derivovanými nákladmi použijeme pre definovanie derivácie množstva výroby v čase. Ostatné väzby korešpondujú s matematickými vzťahmi, ktoré sme popísali v predchádzajúcej časti. Čo sa týka priestoru významných hodnôt náš model zavádza v priestore hodnôt špeciálnu hranicu *max* pre množstvo vyrábaných produktov. Toto predstavuje maximum výrobkov (objem výroby), ktoré sme schopný vyrobiť pri danej množine možných technológii. Nasleduje grafické znázornenie modelu:

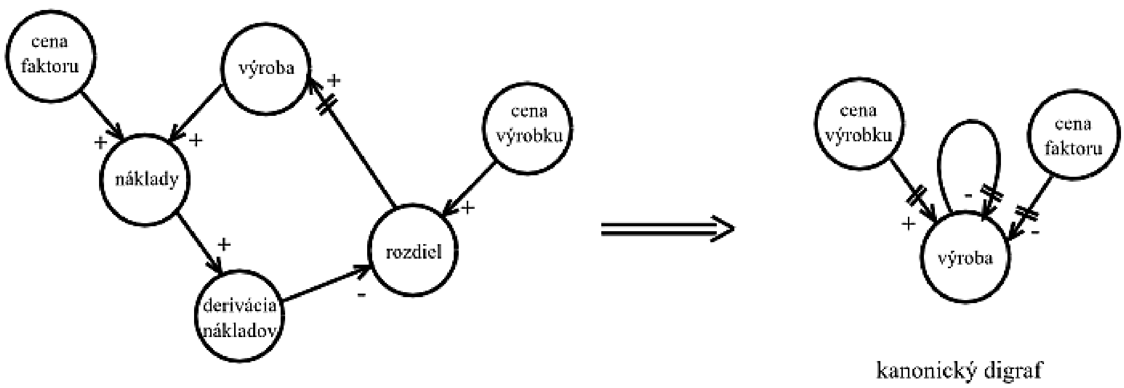



## 4.2.2. Kvalitatívna simulácia modelu

Ako začiatočný stav nastavíme množstvo výroby na nulu s rastúcou deriváciou. Simulácia nám určí tri možné správania. (Množstvo výroby nemusí byť nulové, rovnako sa bude systém správať aj keď zvolíme pre začiatočný stav množstvo výroby interval (0 max) s rastúcou deriváciou.) Množstvo výroby bude stúpať a zastaví sa niekde pod hranicou max a systém sa dostane do rovnováhy. Druhé správanie znázorňuje, že systém sa dosiahne ekvilibrium presne na hranici max. A konečne tretie správanie, rozoberá prípad, keď systém dosiahne hranicu max a množstvo produktov má stále kladnú deriváciu. Tento prípad značí, že firma pri daných parametroch nedosiahne maximálny možný zisk s jej technológiou. Mohli by sme zaviesť prechodovú podmienku pre nový systém, ktorý by simuloval správanie sa firmy pri novej technológii, ktorá by umožnila zväčšiť množstvo výroby, ale tento nový model by sa z kvalitatívneho hľadiska vôbec nelíšil. Pri danej teórii sú rozdiely medzi firmami vyjadrené ich produkčnými funkciami, ale rozdiely sú kvantitatívne a nie kvalitatívne (majú rovnaký priebeh a vlastnosti funkcie, rozdiel je iba v hodnotách). Takže ako odpoveď na simuláciu nového modelu by sme dostali opäť tie isté 3 správania. Na toto správanie sa môžeme dívať ako na napúšťanie umývadla. Tiež by mohli nastať tri stavy – voda v umývadle je ustálená na určitej hladine pod maximom, alebo sa voda ustálila presne na maxime, alebo umývadlo pretieklo. Oprávnenosť tejto analógie ukážeme pri globálnej analýze.

### 4.2.3. Kvalitatívna analýza modelu

Teraz sa pozrime na typ ekvilibria, do ktorého systém dospeje. Použijeme na to znamienkové digrafy, vytvorené z nášho modelu:




kanonický digraf

V kanonickom digrafe tohto modelu je jediná fázová premenná *y,* ktorá popisuje množstvo výrobkov, ktoré firma vyrába a dve exogénne premenné cena produktu a cena faktoru. Z hľadiska štruktúry je tento model rovnaký ako kvalitatívny model pre umývadlo, kde objem vody je množstvo výroby, prítok zodpovedá cene výrobku a odtok cene faktora. Táto analógia je dobre použiteľná aj na ozrejmenie výsledkov simulácie. Voda v umývadle sa ustáli na úrovni, alebo ak je prítok silnejší než odtok voda pretečie. Rovnako sa správa aj hladina výroby vo firme. Tak isto sa dajú na modely firmy zopakovať úvahy o správaní sa systému pri perturbácii exogénnych hodnôt, ktoré sme spravili pre umývadlo. Teda ekvilibrium je stabilné (*sink - stoka*). Zjednodušenie, ktoré sa týkalo počtu faktorov, nám neovplyvní výsledok našej úvahy. Ďalšie faktory, ktoré by sme chceli zobrať do úvahy, by v našej analógii vystupovali ako ďalšie otvory, ktoré zväčšujú odtok. (aj keď ich vplyv na náklady by nemusel mať rovnaký koeficient v závislosti od použitej produkčnej funkcie)

Ak sa na popisovaný dej pozrieme z perspektívy, ktorá bude brať ustálenie hladiny ako veľmi rýchly dej (ustálenie nastane „okamžite“), môžeme sa na firmu (a teda aj na umývadlo) dívať ako na „funkciu“, ktorá pri stanovených cenách, vráti veľkosť produkcie (z modelu vyplýva, že firma sa ustáli v konečnom čase na jednej konkrétnej hodnote pre všetky prípustné hodnoty parametrov - cena faktoru a výrobku).

Túto abstrakciu môžeme spraviť pre každý model, ktorý z kvalitatívneho hľadiska spĺňa digrafový vzor „umývadlo“. Funkcia, ktorú takto dostaneme bude spojitá a monotónne rastúca v závislosti od parametrov zodpovedajúcich „prítokom“ a monotónne klesajúca v závislosti od parametrov zodpovedajúcich „odtokom“. Takže tieto vzťahy sa z dlhodobej perspektívy javia ako kvalitatívne väzby triedy *M*. Tento pohľad modely uplatníme neskôr pri modelovaní trhu.

# 5. Kvalitatívny model spotrebiteľa

## 5.1. Základ – Mikroekonomická teória

### 5.1.1. Teória spotrebiteľa

Vyjadriť matematicky racionálne správanie spotrebiteľa je pomerne zložitý problém na formalizovanie. V mikroekonomickej teórii si spotrebiteľ vyberá *statky* (komodity, goods), ktoré uspokojujú jeho potreby (nemusia to byť len materiálne veci, môžu to byť aj služby atď.) Súbor statkov nazveme *kôš.* Tieto koše môžeme vyjadriť vektorom, kde každý statok má určité množstvo. Spotrebiteľ sa rozhoduje, ktorý kôš statkov je pre neho najvýhodnejší. Túto preferenciu vyjadrujeme tranzitívnou, reflexívnou *reláciou preferencie*. Nezápornú kvázi konkávnu funkciu, ktorá generuje túto reláciu nazveme *funkciou užitočnosti.* Spotrebiteľ je charakterizovaný touto funkciou.

### 5.1.2. Racionálne správanie spotrebiteľa

Problém, ktorý kôš si spotrebiteľ vyberie je problémom maximalizácie *funkcie užitočnosti.* Táto úloha je analogická z úlohou maximalizácie zisku firmy. Spotrebiteľ, ktorý má určitý príjem $I$ (*income*), si kúpi taký kôš statkov s maximálnou úžitkovou funkciou, že cena statkov v ňom obsiahnutých neprekročí jeho príjem.

Pre jednoduchosť predpokladáme len jeden statok (tak ako sme v modeli firmy predpokladali jeden faktor), ktorého úžitková funkcia rastie s množstvom.

Vyjadrené vzťahom:

$$x_{opt.} = max\{x \mid \langle x , p \rangle \leq I\}$$

kde platí

- $p$ ... cena statku

- $I$ ... príjem spotrebiteľa
- $x$ ... množstvo statku (môže byť vektor rôznych statkov, ale kvôli jednoduchosti budeme predpokladať jeden statok)
- $\langle x, p \rangle$ ... skalárny súčet vektorov $x$ a $p$ (pre jednoduchosť predpokladáme len jeden faktor – jednorozmerné vektory)

Zmena, ktorú spotrebiteľ spraví pri vyberaní statku závisí od rozdielu medzi rozpočtom I a cenou momentálne vybraných statkov $\langle x, p \rangle$. Ak je tento rozdiel kladný, spotrebiteľ si môže dovoliť nakúpiť viac statkov, inak musí zmenšiť svoj kôš statkov.

Tento vzťah bude základom pre náš model:

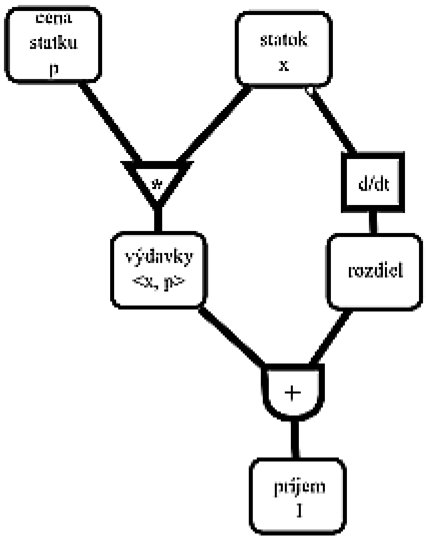
$$\frac{dx}{dt} = I - \langle x, p \rangle$$

Tento model je veľmi jednoduchý a nepokrýva úplne mikroekonomickú teóriu, ktorá analyzuje preferenčné vzťahy medzi jednotlivými statkami a ich cenou. Modelovanie, týchto vzťahov, prostredníctvom metód kvalitatívneho usudzovania je nevhodné, pretože tieto úvahy sa netýkajú vývoja cien a preferencií v čase a sú do veľkej miery postavené na kvantitatívnych vzťahoch. Preto upúšťame od skúmania týchto vzťahov a zameriavame sa čisto na dynamiku výberu. Popis tejto dynamiky využijeme neskôr pri modelovaní trhu. Pre tento model platí rovnaká výhrada ohľadne spojitého času ako pre model firmy.

## 5.2. Kvalitatívny model firmy pre QSIM

### 5.2.1. Väzby modelu

Väzby korešpondujú s matematickými vzťahmi, ktoré sme popísali v predchádzajúcej časti. Grafické znázornenie modelu:

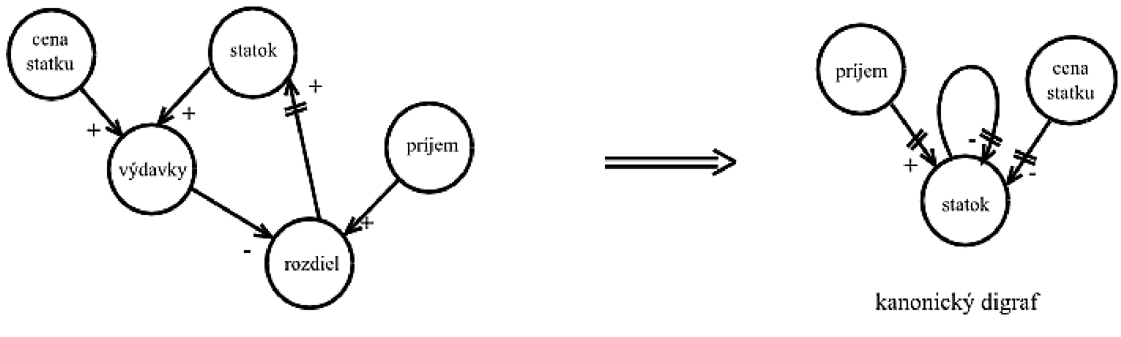



## 5.2.2. Kvalitatívna simulácia modelu

Pri simulácii z nulového počtu statku bude množstvo statku stúpať až pokým sa systém neustáli na takom množstve, ktoré sa po prenásobení cenou rovná príjmu. Toto správanie je len jedno pretože sme neuvažovali o maximálnom množstve, ktoré si spotrebiteľ môže kúpiť(analógia s hodnotou *max* v modeli firmy).

## 5.2.3. Kvalitatívna analýza modelu

O stabilite tohto ekvilibria rozhodneme použitím digrafu:




Pri analyzovaní digrafu vidíme, že v kanonickom tvare má presne tú istú štruktúru ako model firmy a teda aj umývadlo. Opäť tu platia tie isté úvahy o stabilite a reakciách modelu na perturbácie, kde príjem pôsobí ako prítok a cena statku ako odtok. Spotrebiteľ teda tiež predstavuje akúsi „funkciu“, ktorá pre danú cenu statku a príjem spotrebiteľa vráti množstvo statku, ktoré by si spotrebiteľ kúpil.

# 6. Model kompetitívneho trhu

## 6.1. Základ – Mikroekonomická teória

### 6.1.1. Dokonalá súťaž na trhu

Zo základných modelov firmy a spotrebiteľa sa dá ďalej uvažovať o správaní trhu ako celku. Model firmy môžeme brať ako funkciu, ktorá z parametrov ceny výrobku a cien faktorov vráti počet výrobkov, ktoré dodá na trh daná firma. Rovnako sa môžeme pozerať aj na model spotrebiteľa, ktorý pri parametroch príjmu a ceny výrobku určuje, koľko výrobkov si spotrebiteľ kúpi. Počet všetkých výrobkov, čo sa firme oplatí vyrobiť pri danej cene označíme *S(p)* a nazveme ho *ponukovou funkciou* firmy. Podobne definujeme *D(p) dopyt* po výrobku pri cene *p* ako množstvo výrobkov, ktoré by si pri danej cene kúpil jeden spotrebiteľ. Tento prístup použijeme pri modelovaní trhu kde zároveň pôsobí veľa firiem a spotrebiteľov.

*Priemysel* budeme chápať ako sumu N identických firiem. Ak teda *S(p)* je ponuková funkcia jedného výrobcu, potom *ponuková funkcia priemyslu* $S_{\Sigma}(p)$ je súčtom hodnôt ponukových funkcií jednotlivých firiem.

$$S_{\Sigma}(p)=NS(p)$$

Pre spotrebiteľov je problém zložitejší, pretože mikroekonomická teória rozlišuje rôzne druhy statkov, podľa toho akým spôsobom sú vyberané do spotrebiteľovho koša statkov v závislosti od jeho príjmu (základný, luxusný, zberateľský). V nasledujúcich úvahách sa budeme zaoberať základným statkom, ktorého *dopytová funkcia D(p)* s rastúcou cenou klesá. Za s*poločenský dopyt* budeme považovať súčet dopytových funkcií všetkých spotrebiteľov. Ak predpokladáme, že sú identický, môžeme vyjadriť spoločenský dopyt ako súčet dopytov jednotlivých spotrebiteľov.

$$D_{\Sigma}(p)=ND(p)$$

V ponukovej a dopytovej funkcii vystupujú ešte ďalšie parametre (cena faktorov pre firmu a veľkosť príjmu pre spotrebiteľa), ktoré pokladáme za fixné a pre jednoduchosť ich vynechávame. Ich vplyv na hodnoty funkcií bol popísaný v pri analyzovaní predchádzajúcich modelov. Predpoklad, že firmy a spotrebitelia sú identický, ktorý zavádza mikroekonomická teória, nie je pre kvalitatívny model nevyhnutný. Pretože operujeme s kvalitatívnymi hodnotami, nepotrebujeme na vyjadrenie spoločenského dopytu a ponuky priemyslu poznať presný kvantitatívny prínos každej jednotlivej firmy. Kvôli súdržnosti s mikroekonomickou teóriou však ostaneme pri tomto predpoklade.

### 6.1.2. Rovnováha na čiastkovom trhu pri dokonalej konkurencii

Predpokladáme trh s dokonalou konkurenciou, čo znamená, že konanie jednej firmy neovplyvní cenu na trhu. Budeme uvažovať situáciu na trhu pre jeden produkt. Pod rovnováhou na trhu rozumieme stav, pri ktorom sa množstvo výrobkov, ktoré sa oplatí firmám pri danej cene vyrobiť, rovná množstvu výrobkov, ktoré si zákazníci pri danej cene chcú kúpiť.

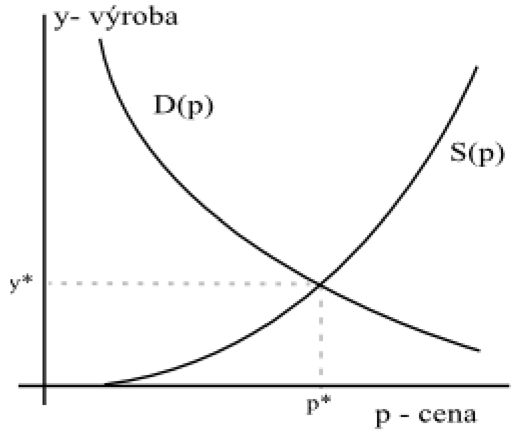
Vyjadrené rovnicou:

$$S_{\Sigma}(p)=D_{\Sigma}(p)=y$$

kde platí

- $p$ … cena výrobku na trhu
- $y$ … množstvo výrobku na trhu
- $S_{\Sigma}(p)$ … *supply* – ponuka priemyslu
- $D_{\Sigma}(p)$ … *demand* – spoločenský dopyt

Ponuková funkcia je rastúca v závislosti od ceny, lebo firme sa pri vyššej cenne oplatí vyrobiť viac výrobkov (v analógii s umývadlom – ak sa zväčší prítok, stúpne hladina). Dopytová funkcia je klesajúca v závislosti od ceny, pretože spotrebiteľ si môže dovoliť menší počet výrobkov (v analógii s umývadlom – ak sa zväčší odtok, hladina klesne). Takže existuje jedna cena pri ktorej sa firmám oplatí vyrobiť také množstvo výrobkov, ktoré uspokojí všetkých spotrebiteľov.




K tomuto rovnovážnemu stavu sa dopracujeme postupnými krokmi pomocou zmeny ceny a množstva produktov, ktoré sú na trhu. Zmeny robíme podľa rozdielov medzi dopytom (resp. ponukou) a množstvom produktov, čo je na trhu. Tieto zmeny vyjadríme vzťahmi:

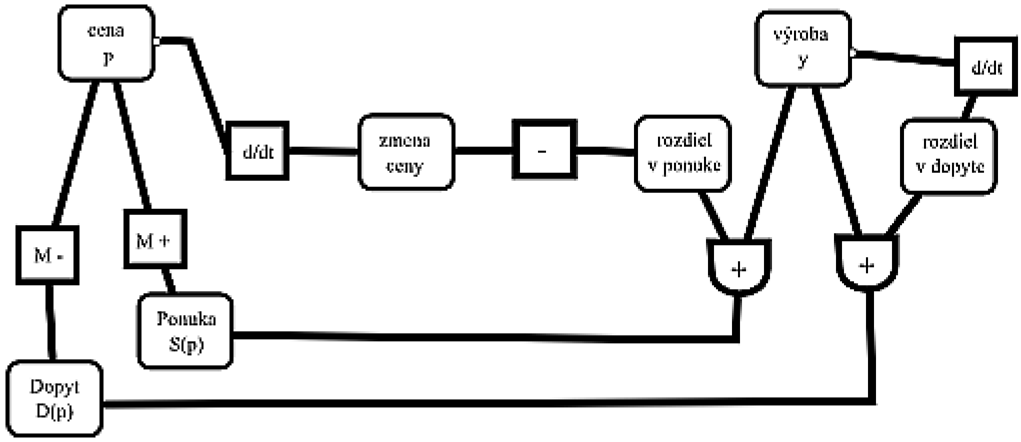
$$\frac{dp}{dt} = -a(S_{\Sigma}(p) - y)$$
$$\frac{dy}{dt} = b(D_{\Sigma}(p) - y)$$

Tieto rovnice sú základom modelu trhu. Ako sme spomínali v týchto funkciách by mohli vystupovať ako argumenty aj príjem spotrebiteľa a náklady firmy, ale tieto parametre určujú iba tvar kriviek ale nie ich priebeh, takže kvalitatívne neovplyvňujú systém. Dôvod, prečo by sme mohli uvažovať ďalšie exogénne premenné, je ten, že funkcie dopytu a ponuky sú

## 6.2. Kvalitatívny model trhu pre QSIM

### 6.2.1. Väzby modelu

V súlade s predpokladaným priebehom funkcií určíme väzby pre dopyt a ponuku. Dopyt je monotónne klesajúca funkcia ceny a ponuka zase rastúca, takže v modeli budú vyjadrené väzbou $M^-$ respektíve $M^+$. Väzba *minus* sa použije na zmenu znamienka výrazu v zátvorke v prvej rovnici. Bez zmeny výsledku z kvalitatívneho pohľadu môžeme predpokladať, že parametre *a,* b, ktoré vyjadrujú rýchlosť zmien na trhu, sú rovné 1 a teda ich nezahŕňame do modelu. Ostatné väzby korešpondujú s matematickými vzťahmi. Grafické znázornenie modelu:

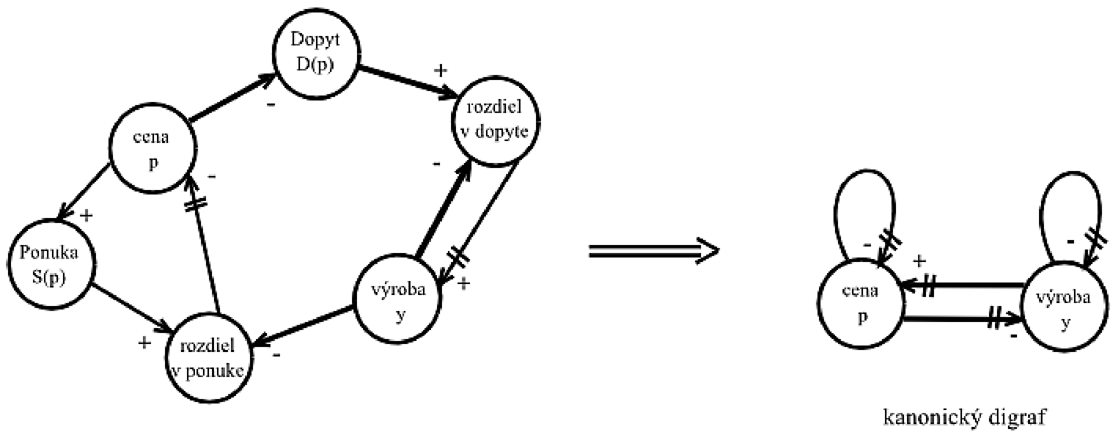



## 6.2.2. Kvalitatívna simulácia modelu

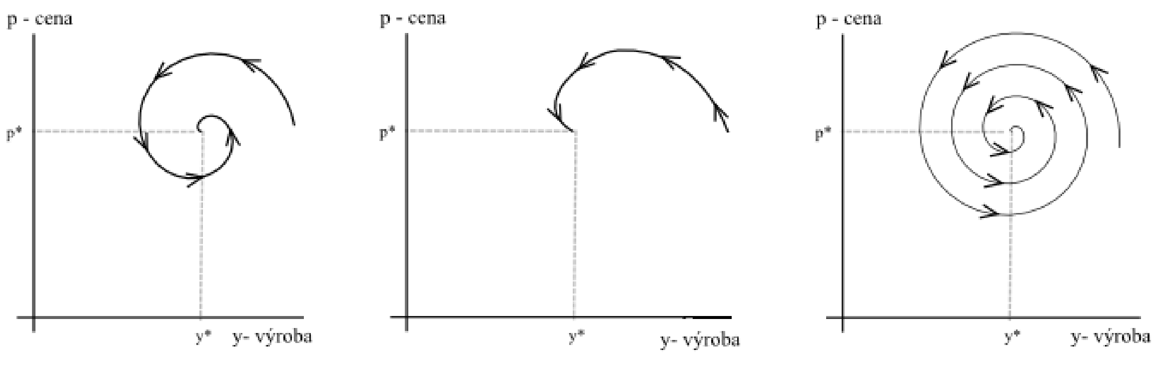
Začiatočný stav má nastavenú nenulovú cenu a nenulové množstvo výrobkov na trhu. Výsledok simulácie má tak veľa stavov, že sa simulácia zastaví pri dosiahnutí nastaveného limitu. Naproti očakávaniu jedného ekvilibria do ktorého dospeje systém, máme nekonečný strom správaní. Každá vetva, ktorá je odsimulovaná do konca, končí v predpokladanom ekvilibriovom stave, kde sa dopyt rovná ponuke a množstvu výrobkov na trhu.

## 6.2.3. Kvalitatívna analýza modelu

Toto vetvenie objasníme kvalitatívnou analýzou digrafu tohto modelu:



Podľa klasifikácie digrafu tohto modelu, je ekvilibrium stabilné (*sink – stoka*). Takže pri vychýlení sa vždy vráti do pôvodného ekvilibria. Ak sa pozrieme na štruktúru digrafu uvidíme podobnosť s inými najmä fyzikálnymi modelmi, ktorá nám pomôže objasniť výsledok simulácie, Ak digraf modelu má dve fázové premenné spojené záporným cyklom a žiadne slučky, jedná sa o model, ktorého ekvilibrium je *centrum*. To znamená cyklické správanie, čiže ak sa vychýlime model z ekvilibria už nikdy sa doň nevráti, ale ani nediverguje. Hodnoty premenných budú oscilovať okolo ekvilibria po dráhe určenej v závislosti od vychýlenia. Takýto digraf zodpovedá napríklad modelu netlmenej pružiny (ak zanedbáme trenie, tak pružina bude neustále kmitať podľa sily, ktorú sme jej dodali na začiatku). Ak pridáme do digrafu jednu negatívnu spätnú väzbu, dostaneme graf pre model tlmenej pružiny (trenie spôsobuje spomalenie závažia a nakoniec sa pružina dostane do pôvodného stavu, z ktorého bola vychýlená). Systém s touto štruktúrou má stabilné ekvilibrium. Rovnako ako systém s dvoma zápornými väzbami. Model pre tlmenú pružinu tiež generuje nekonečný strom správaní. Problém spočíva v tom, že mi nevieme koľko kmitov spraví pružina, než ju tlmenie (záporná slučka) vráti do pôvodného stavu. Počet kmitov závisí od miery akou na seba vplývajú premenné, čo je závislé od magnitúd väzieb. Od týchto údajov sme abstrahovali, takže náš model nám korektne generuje správania pre všetky možné špirálové trajektórie vedúce do ekvilibria. Tých je nekonečne (spočítateľne) veľa. Zobrazené vo fázovom priestore:




Z rovnakého dôvodu nám generuje náš model s podobnou štruktúrou nekonečne veľa správaní. Preto v tomto prípade nám skôr než simulácia poskytne dôležitejšiu informáciu kvalitatívna analýza znamienkovými digrafmi. Zo stability tohto ekvilibria vyplýva, že umelá zmena ceny alebo množstva výrobkov na trhu nebude trvalá a systém sa vráti do pôvodného ekvilibria. Jeho hodnota je určená krivkami dopytu a ponuky. Preto trvalá zmena musí vychádzať zo zmeny parametrov vplývajúcich na tvar týchto kriviek (príjem spotrebiteľa a náklady firmy).

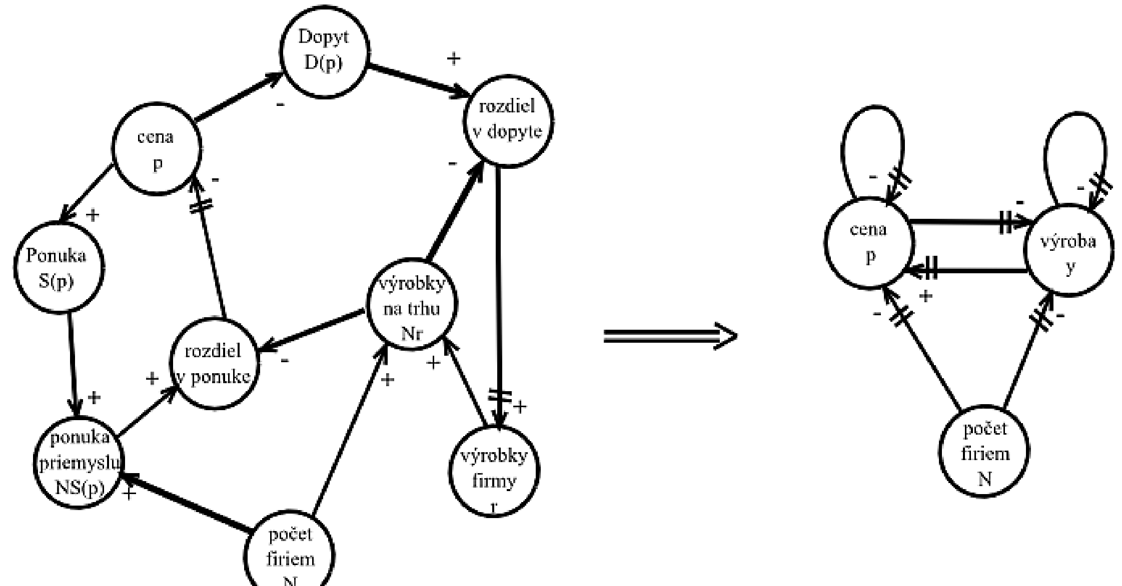
## 6.3. Dlhodobá rovnováha pri voľnom vstupe na trh

### 6.3.1. Mikroekonomická teória

Teraz sa zameriame na skúmanie trhu počas dlhšieho priebehu času. Ak pri uvedenej rovnováhe na trhu dosahujú firmy zisk pritiahne to na trh ďalšie firmy, ktoré sa zvýšia ponuku celého priemyslu. Tento prístup pracuje v dvoch časových rovinách. V krátkodobej sa podľa momentálneho počtu firiem upraví cena výrobku a množstvo výroby pripadajúcej na jednu firmu. V dlhodobej sa podľa danej ceny a výroby jednej firmy vypočíta či firma dosahuje zisk. V tomto prípade využijeme predpoklad identity firiem, ktorý sme nutne nepotrebovali pri pôvodnom trhu. Upravené rovnice obsahujú novú exogénnu premennú $N$ – *počet firiem*. Namiesto počtu výrobkov na trhu $y$, bude v modeli vystupovať premenná *r – množstvo výrobkov z jednej firmy.* Funkcia *S(p)* predstavuje ponukovú funkciu jednej firmy. Vzťahy pre vývoj trhu teraz prepíšeme podľa nových premenných:

$$\frac{dp}{dt} = -a(NS(p) - Nr)$$
$$\frac{dr}{dt} = b(D_{\Sigma}(p) - Nr)$$

Z analýzy znamienkového digrafu vidíme, že systém je takého istého typu ako pri pôvodnom vyjadrení a teda platia všetky úvahy z predchádzajúceho modelu:




kanonický digraf

## 6.3.2. Dlhodobá rovina kompetitívneho trhu

Teraz sa zameriame na popis dlhodobej roviny nášho systému. Vychádzať budeme z predpokladu, že cena a počet výrobkov vyrobených v jednej firme priemyslu je exogénne daný (ekvilibriové hodnoty z krátkodobej roviny). Podľa modelu firmy zavedieme ďalšie exogénne premenné: *w – cena nákladov.* Zisk firmy je vyjadrený rozdielom výnosu (súčin ceny a množstva) a nákladov firmy. Náklady sa vypočítajú cez nákladovú funkciu ako v modeli firmy. Tento rozdiel môžeme použiť ako indikátor zmeny počtu firiem. Ak je zisk kladný, tak na trh prídu ďalšie firmy a poruší sa krátkodobá rovnováha. Teraz sa vyrieši úloha stabilizácie trhu. Takto získame nové hodnoty pre cenu a množstvo vyrábané jednou firmou a pokračujeme v dlhodobej rovine. Pri simulovaní týchto systémov narážame na určité problémy, ktorým sa budeme venovať v ďalšej časti.

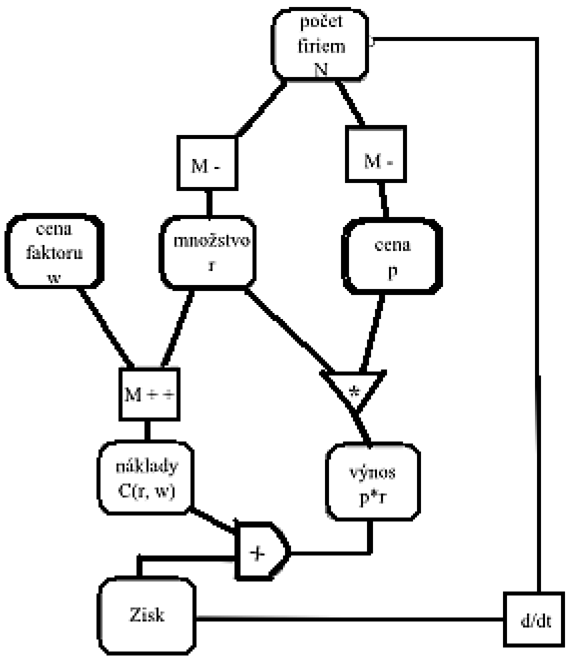
## 6.3.3. Možnosti simulovania v QSIMe

Chceme model, ktorý sa po dosiahnutí ekvilibria prepne na iný model. Toto v normálnom QSIMe nie je možné, pretože stavy, ktoré dosiahnu ekvilibrium sú odstraňované zo zásobníku pre simulovanie nasledovníkov. Pre potreby modelovania viacerých procesov s odlišnou rýchlosťou bolo do QSIMu pridané rozšírenie – *TSA time scale abstraction.* Je postavené na princípe rozdelenia systému na rýchlejšie a pomalšie mechanizmy. Rýchlejší berie pomalší ako konštantný, takže sa na neho môžeme dívať ako na zdroj hodnôt exogénnych premenných. Pomalší mechanizmus berie rýchlejší ako okamžite dosahujúci ekvilibrium, takže berie vzťahy medzi premennými v rýchlejšom ako funkčné závislosti. Simulácia vychádza z toho, že ekvilibrium dosiahnuté v rýchlejšom mechanizme znamená perturbáciu pre pomalší, takže sa po ustálení rýchlejšieho presunie simulácia do prostredia pomalšieho mechanizmu.

Tento prístup sme neimplementovali pretože, už rýchlejší mechanizmus v našom prípade generuje nekonečný strom správaní. Zameriame sa preto len na pomalší mechanizmus – závislosť počtu firiem na trhu od ich počtu. Matematicky vyjadríme vzťahy popísané v predchádzajúcej časti:

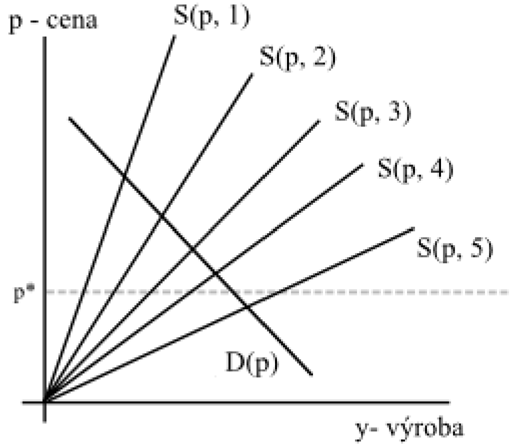
$$p = Trhová\ cena(N) \quad r = Podiel\ výroby(N) \quad Náklady = C(r, w)$$
$$Zisk = pr - C(r, w) \quad \frac{dN}{dt} = a(Zisk)$$

Podľa týchto vzťahov vytvoríme model dlhodobého vývoja trhu.

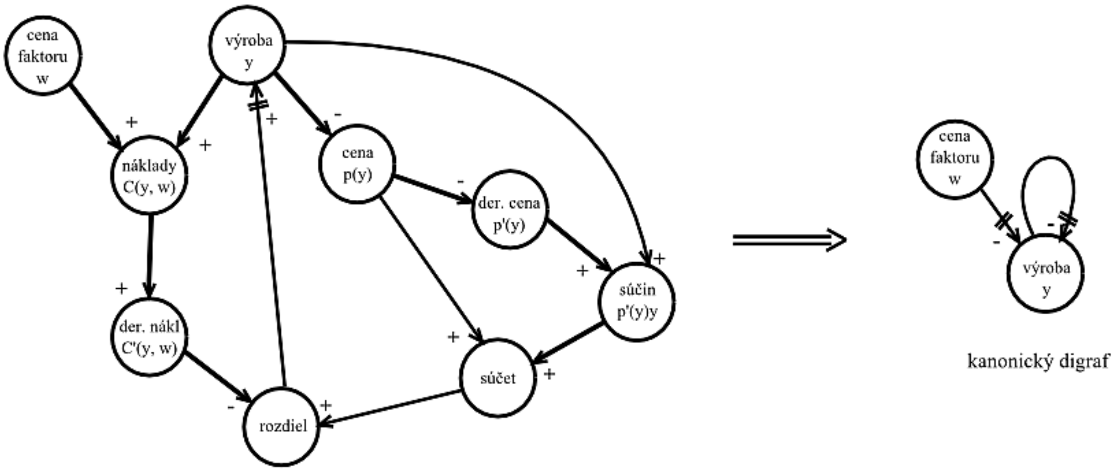



## 6.3.4. Kvalitatívna analýza modelu

Zo simulácie vidíme, že počet firiem bude stúpať až sa zastaví na jednej úrovni. Zároveň ako rastie počet firiem na trhu klesá cena produktu *p* a aj podiel firmy na trhu *r* (aj keď celková ponuka priemyslu *Nr* stúpa). Táto úroveň znamená, že sa neoplatí vstúpiť ďalšej firme pretože by nedosiahla zisk. Pretože berieme N ako spojitú premennú (čo samozrejme nie je reálny predpoklad) klesne zisk (rozdiel medzi výnosom a nákladmi) v ekvilibriu na nulu. Toto by sme mohli odstrániť ďalšou exogénnou premennou, ktorá nastaví hladinu, pod ktorou nepustíme ďalšiu firmu na trh. Táto úprava neovplyvní systém kvalitatívne. Výsledok o klesaní zisku a ceny totožný s výsledkom, ktorý je dosiahnutý v mikroekonómii cez analýzu priebehu dopytovej a ponukovej funkcie:




Na analýzu stability ekvilibria tohto systému použijeme digraf. Väzby rýchleho mechanizmu (ustálenie ceny a podielu firmy na trhu) nebudeme uvažovať, keďže v ňom predpokladáme ekvilibrium, to jest vplyvy na premenné v tomto systéme sú nulové.




V digrafe vyjde niekoľko spätných väzieb na premennú *N*,  dve z nich sú záporné a jedna kladná. Kladná väzba vyplýva z toho, že pri rastúcom počte firiem klesá počet výrobkov a tým aj náklady, takže vytvárajú predpoklad pre rast zisku. Klesajúci počet výrobkov vyrábaných jednou firmou však znižuje aj výnos, takže to ruší tento kladný vplyv. Predpokladáme, že výsledná spätná väzba je záporná. Opäť vidíme podobný vzor pre systém ako umývadlo, teda ekvilibrium je stabilné (*sink – stoka*).

Teraz sa môžeme pozrieť na celý systém, ako navzájom prepojený v rôznych časových rovinách. Od modelov firmy a spotrebiteľa na najrýchlejšej cez model trhu, až po  model počtu firiem v priemysle. Napríklad keď sa zvýši cena faktoru, zníži sa počet výrobkov pri danej cene, ktoré sa firmám oplatí vyrábať. To posunie ponukovú krivku k nižším hodnotám a vyvedie trh z rovnováhy. Cena musí narásť a teda klesne počet výrobkov, ktorý si žiadajú spotrebitelia. Tým pádom sa zmení zisk jednotlivých firiem (narástli náklady a klesol podiel firmy na trhu, zvýšila sa cena) a môže sa stať, že trh už nedokáže uživiť daný počet firiem a teda sa zníži počet firiem na trhu.

# 7. Kvalitatívny model monopolu

## 7.1. Základ – Mikroekonomická teória

### 7.1.1. Teória monopolu

Pod monopolom rozumieme firmu, ktorá má výsadné postavenie na trhu. Tým sa väčšinou myslí, že daný výrobok alebo službu na trh dodáva iba jedna firma. To má dôsledky na stanovenie problému maximalizácie zisku. Ak firma nie je monopolom tak predáva výrobky pri cene danej trhom, lebo inak by svoje výrobky nepredala, keďže spotrebitelia by sa obrátili ku konkurencii. Zásadný rozdiel medzi firmou v trhovom prostredí a monopolom je teda schopnosť monopolu stanoviť cenu výrobku. Monopol cenu *stanovuje* a firma len *prijíma* cenu danú trhom.

Samozrejme objem predaných výrobkov závisí aj od ich ceny pretože, čím je cena väčšia tým menej spotrebiteľov si výrobok bude môcť dovoliť. Monopol tak ako racionálna firma sa snaží maximalizovať svoj zisk, takže úlohou bude zvoliť nielen objem výroby, ale aj cenu takú, že zisk monopolu bude maximálny.

### 7.1.2. Racionálne správanie monopolu

Pre monopol platia v podstate všetky predpoklady ako pre firmu. Takže má produkčnú funkciu, ktorá určuje koľko výrobkov dokáže vyrobiť z daného množstva faktorov, podľa technológie ktorú používa firma. Ceny faktorov sú dané exogénne, tak ako v prípade firmy. Cenu výrobku aj objem výroby bude monopol voliť tak, aby maximalizoval svoj zisk. Monopol čelí dvom obmedzeniam pri určovaní ceny a veľkosti výroby. Prvé je obmedzenie technologické, ktoré určuje aký počet výrobkov dokáže monopol vyrobiť. Je vyjadrené cez nákladovú funkciu. Budeme predpokladať, že derivácia tejto funkcie je kladná. Druhé obmedzenie, spočíva v tom, že počet výrobkov, ktoré monopol predá musí byť menšie, alebo rovné ako spoločenský dopyt po výrobku pri danej cene, vyjadrené ako $y \leq D(p)$. Vo všeobecnosti môžeme predpokladať, že monopol vyrobí toľko výrobkov, po koľkých je dopyt, čiže rovnicu pre zisk monopolu môžeme vyjadriť vzťahom:

$$Zisk(p) = p\,D(p) - C(D(p))$$

kde

- p ... cena výrobku na trhu
- D( p) … spoločenský dopyt po výrobku pri cene p
- C ( *) … nákladová funkcia

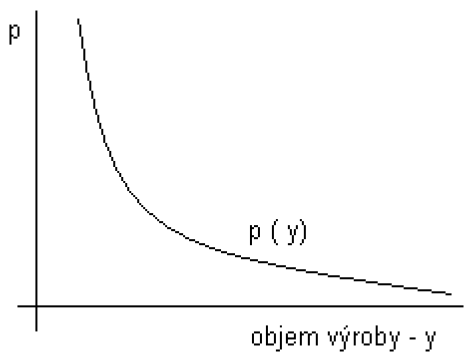
Pre jednoduchšie vyjadrenie vzťahu môžeme použiť inverznú funkciu k dopytovej funkcii. Inverzná funkcia *p(y)* k dopytovej funkcii pre dané *y* - množstvo výrobkov, určí cenu pri ktorej sa všetky predajú. Základný vzťah, ktorý táto funkcia popisuje: čím viacej výrobkov potrebujeme predať, tým musia byť lacnejšie. S touto funkciou môžeme vzťah pre zisk vyjadriť ako:

$$Zisk(y) = p(y)\,y - C(y)$$

Maximalizovať zisk pre monopol znamená nájsť taký objem výroby, pre ktorý má táto funkcia maximum. To znamená, že pre objem výroby, ktorý produkuje maximálny zisk platí:

$$0 = p(y) + p'(y)\,y - C'(y)$$

Medzi predpoklady patrí $p'(y) < 0$. Toto berieme z priebehu funkcie *p(y)* zobrazenej na obrázku:

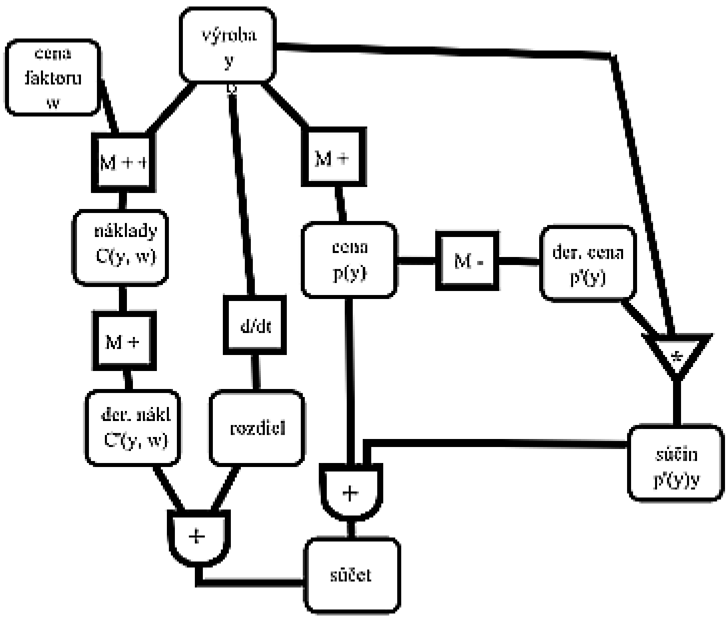



Z tohto priebehu vidíme aj to, že derivácia funkcie *p(y)* je rastúca s rastúcim objemom výroby. Na základe týchto vzťahov zostavíme QDE model pre QSIM a porovnáme jeho výsledky s výsledkami dosiahnutými analyticky v mikroekonomickej teórii.

## 7.2. Kvalitatívny model trhu pre QSIM

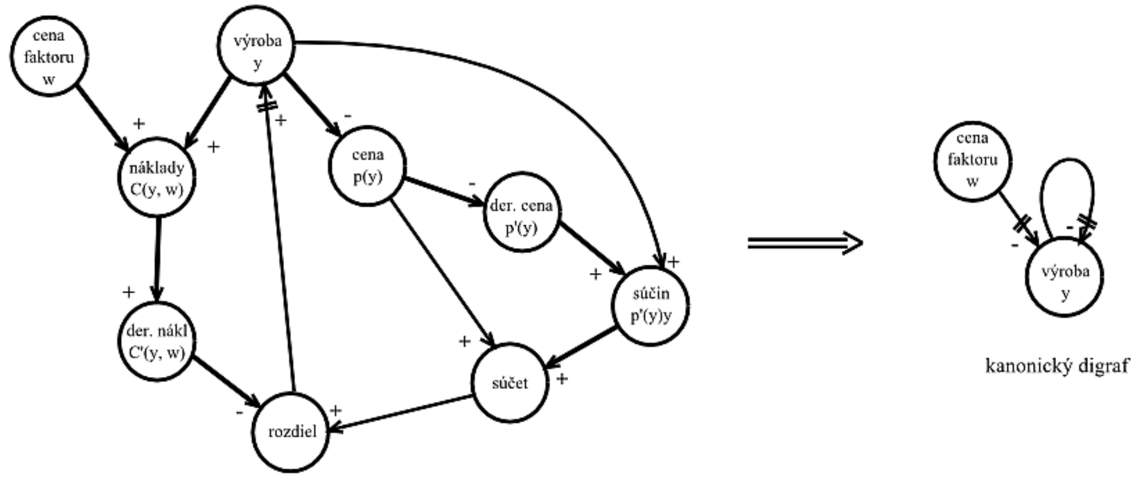
### 7.2.1. Väzby modelu

Model je podobný ako model firmy, s rozšírením o člen *p'(y)y.* Podľa priebehu funkcie *p'(*y) vieme určiť väzbu, ktorú použijeme na vyjadrenie závislosti ceny a jej derivácie. Cena klesá s množstvom, takže derivácia ceny je záporná. Podľa priebehu funkcie vidíme, že najprv cena klesá prudko a tento pokles sa s nárastom množstva spomaľuje. Takže derivácia ceny s množstvom rastie (od - ∞ k 0). Takže vzťahy medzi týmito premennými vyjadríme nasledujúcimi väzbami. S rastúcim množstvom výroby *y* cena *p* klesá – väzba $M^-$. Čím je vyššia cena *p* tým je jej *derivácia p'(y)* menšia – väzba $M^-$. Všimnime si, že spojením týchto väzieb dostaneme väzbu $M^+$. Takto popísané vzťahy medzi premennými teda zodpovedajú priebehu funkcie *p(y)* z nášho grafu. Ostatné väzby korešpondujú s matematickými vzťahmi, tak ako to bolo v modeli firmy. Rovnako ako pri firme zavedieme do priestoru význačných hodnôt hranicu *max.* Jej interpretácia je rovnaká ako pre model firmy. Nasleduje grafické znázornenie modelu:



### 7.2.2. Kvalitatívna analýza modelu

Pre začiatočný stav modelu môžeme zvoliť, rovnako ako pre firmu, množstvo výroby interval (0 max) s rastúcou deriváciou (mohli by sme zvoliť výrobu ako nulovú, ale v tom prípade by cena bola nekonečná a s takouto situáciou sa v realite nestretávame). Simulácia vygeneruje opäť tri správania, ktoré presne zodpovedajú správaniam firmy. Rovnováha vo výrobe sa dosiahne buď pod hranicou maxima, presne na hranici maxima, alebo je situácia na trhu (daná *cenou produktu p* a *faktoru w*) taká, že maximálny zisk by dosiahol monopol za hranicou maxima svojich technologických možností. Čiže toto správanie opäť korešponduje s napúšťaním umývadla ako v prípade firmy. Na ďalšiu analýzu stability tohto ekvilibria použijeme znamienkové digrafy:




Štruktúra modelu monopolu je zložitejšia ako štruktúra modelu firmy. Je to spôsobené tým, že cena výrobku už nie je exogénna premenná a tiež závisí od množstva výrobkov. Táto zmena nám prináša do modelu výraz *p'(y)y,* ktorý nám spôsobí, že v kánonickom grafe existujú spätné väzby na premennú *y* s rôznymi znamienkami. Okrem zápornej spätnej väzby, ktorá je aj v modeli firmy, máme dve kladné spätné väzby, ktoré do modelu priniesol výraz *p'(y)y.* Keďže z priebehu funkcie *p(y)* vieme, že hodnota tohto výrazu je vždy záporná ($p'(y) < 0$), tento výraz pôsobí na deriváciu množstva záporne z čoho vyplýva ,že kladné väzby nemusíme brať do úvahy. Kánonický tvar digrafu je klasifikovaný ako stabilný, čiže opäť sa jedná o ekvilibrium typu *sink – stoka.* Aj v tomto prípade by sme mohli použiť analógiu s umývadlom ako pri modeli firmy. V tomto modely nám nevystupuje cena ako exogénna premenná pôsobiaca kladne na objem výroby, ktorá by mohla reprezentovať prítok. Cena je daná dopytovou funkciou, v ktorej by sme mohli uvažovať parameter príjem obyvateľstva. Tento parameter zväčšuje cenu, pri ktorej sú ľudia ochotný kúpiť výrobok, takže by pôsobil kladne na objem výroby a zodpovedal by prítoku v umývadle.

Tieto modely ukázali, že firma a monopol sa správajú identicky. Maximalizujú svoj zisk na základe daných parametrov(pre firmu cena faktorov a cena výrobku, pre monopol cena faktorov a príjem obyvateľstva) Rozdiel medzi firmou a monopolom spočíva v rozdielnej hladine výroby, ktorú by nastavil monopol oproti firme pri tých istých nákladoch. Monopol bude mať nižšiu hladinu výroby (a teda vyššiu cenu) oproti firme, kvôli výrazu $p'(y)y$, ktorý pôsobí v derivácii záporne (pretože $p'(y) < 0$). Tento zaujímavý výsledok nedokážeme vyvodiť z našich modelov, pretože na porovnanie potrebujeme kvantitatívne vyjadrenie hladiny výroby oboch modelov. A to nezískame prostriedkami kvalitatívnej simulácie.

### 7.2.3. Ďalšie mikroekonomické modely

Po monopole sa teória logicky zameriava na skúmanie situácie, keď je na trhu viac firiem a ich spoločná produkcia určuje cenu výrobku na trh - *oligopol*. Ak sú tie spoločnosti dve, hovoríme o *duopole.* Maximalizácia zisku každej firmy v takomto prípade závisí od ceny faktorov, množstva výroby a tiež množstva výroby konkurenčnej firmy. Duopol má podľa teórie jedno riešenie pre rovnovážnu hladinu výroby, v ktorom platí:

$$0 = p(y_1+y_2) + p'(y_1+y_2)y_1 - C'(y_1)$$
$$0 = p(y_1+y_2) + p'(y_1+y_2)y_2 - C'(y_2)$$

Z diskrétneho pohľadu firmy reagujú na hladinu výroby konkurenta tak, že v ďalšom kroku nastavia svoju hladinu tak, aby maximalizovali svoj zisk za predpokladu, že konkurent zachová svoju hladinu výroby. Týmito postupnými zmenami sa obe firmy dostanú svoju optimálnu úroveň. Takýto priebeh máme problém simulovať spojitým modelom. Aj keď mikroekonomická teória uvádza vzťahy aj v spojitej verzii, ich simulácia cez QSIM produkuje nekonečne správaní z podobných dôvodov ako model pre trh. Keďže pracujeme bez kvantitatívnych obmedzení, nevieme akou veľkou zmenou budú firmy reagovať. Takže sa môže stať, že firma príliš veľkou zmenou preskočí rovnovážny bod a bude musieť urobiť zmenu opačným smerom. Každé takéto otočenie nám v QSIMe generuje nové správanie. Pri modeli trhu sme vedeli, ako sa bude model správať v konečnom dôsledku, vďaka výsledkom z analýzy jeho digrafu. Pre model duopolu je najmä kvôli členu $p'(y_1 + y_2)\, y_1$ ťažké určiť väzby medzi fázovými premennými. Vychádzajú zároveň kladné aj záporné, takže hodnota výslednej väzby závisí od magnitúd jednotlivých väzieb. Digraf, ktorý vyjde z tohto modelu nemá znamienkovú vlastnosť, takže sa nevieme z pohľadu kvalitatívnej analýzy dostať k výsledku z mikroekonomickej teórie.

Keďže znamienková stabilita je veľmi silná vlastnosť systému, nie vždy ju dokážeme odvodiť. Pre zložitejšie systémy s viac než dvoma fázovými premennými je klasifikácia ťažká a stabilita často závisí od magnitúd väzieb. Preto teraz presunieme pozornosť na možnosť aplikovania kvalitatívnej analýzy v makroekonómii.

# 8. Solowov model rastu

## 8.1. Základ – Makroekonomická teória

Nasledujúce definície a vzťahy vychádzajú z publikácie Advanced macroeconomic.[8]

### 8.1.1. Pozadie modelu

Životná úroveň v rôznych krajinách sveta dosahuje obrovské rozdiely. Presné porovnanie „úrovne“ krajín môže byť obtiažne, ale na porovnanie sa často používa priemerný reálny príjem obyvateľa a rast tohto ukazovateľa v čase. Reálny príjem sa medzi vyspelými a rozvojovými krajinami líši často aj niekoľkonásobne. Rovnako je vidno aj rozdielna rýchlosť rastu tohto ukazovateľa rôznych krajín v histórii. Dopady na štandardy životnej úrovne týchto rozdielov sú obrovské. Rozdiely v reálnom príjme medzi krajinami sú prepojené s rozdielmi v gramotnosti, úmrtnosti detí, očakávaná priemerná dĺžka života a rôznymi ďalšími priamymi meradlami prosperity spoločnosti. A práve dopadmi rastu a možnými efektami krátkodobých fluktuácií sa zaoberá makroekonómia.

Solowov model rastu je začiatočným bodom pre skoro všetky analýzy rastu. Solowov model je veľmi hrubo zjednodušený v mnohých smeroch, ale účelom modelu nie je byť plne realistický. Jeho účelom je podať náhľad iba na určitý aspekt sveta. Ak zjednodušenia nespôsobia nesprávne odpovede modelu na oblasť, ktorú sa snažíme pochopiť, je menšia komplexnosť výhodou vďaka, ktorej môžeme skúmanému problému ľahšie porozumieť.

8 Viď [10]

# 8.2. Predpoklady modelu

## 8.2.1. Produkčná funkcia

Solowov model sa zameriava na štyri premenné: produkcia (*Y*), kapitál (*K*), pracovná sila (*L*) a "znalosti" alebo "efektivita práce" (*A*). V každom časovom okamihu má ekonomika určité množstvo kapitálu, pracovnej sily a znalostí, ktoré sa spoločne podieľajú na množstve produkcie. Produkčná funkcia má tvar:

$$Y(t)=F(K(t),A(t)L(t))$$

kde *t* zodpovedá času.

Všimnime si dve význačné črty produkčnej funkcie. Predovšetkým, čas nevstupuje do produkčnej funkcie priamo, ale iba cez hodnotu premenných *K*, *A* a *L*. Tým pádom sa množstvo produkcie mení v priebehu času iba, ak sa menia hodnoty vstupných premenných do tejto funkcie. To znamená, že množstvo produkcie pri danom kapitále a pracovnej sile rastie časom jedine, ak rastie množstvo efektivita práce.

Ďalej, A a L vstupujú do funkcie prepojené násobením. *AL* je označované ako *efektívna práca*, a technologický pokrok, ktorý takto zohľadňujeme v produkčnej funkcii sa nazýva *prácu-zväčšujúci(labor-augmenting)*. Ústredné predpoklady modelu sa zaoberajú vlastnosťami produkčnej funkcie a vývojom vstupných premenných v priebehu času.

## 8.2.2. Vlastnosti produkčnej funkcie

Zásadný predpoklad týkajúci sa produkčnej funkcie je to, že má *konštantné výnosy z rozsahu* v závislosti od jej dvoch argumentov, kapitálu a efektívnej práce. To znamená, že pri dvojnásobnom kapitále a dvojnásobnej efektívnej pracovnej sile, sa množstvo produkcie tiež zdvojnásobí. Všeobecnejšie, prenásobením oboch argumentov funkcie nezápornou konštantou c, sa množstvo produkcie zmení c-násobne.

$$F(cK,cAL)=cF(K,AL),\ \forall c\geqslant 0$$

Na tento predpoklad sa môžme dívať, ako na spojenie dvoch predpokladov. Prvý je ten, že ekonomika je dosť veľká a zisky zo špecializácie boli vyčerpané. V malej ekonomike, by bolo pravdepodobne dosť možností ako ďalšou špecializáciou dospieť pri zdvojnásobení kapitálu a práce k viac než dvojnásobnému množstvu produkcie. Solowov model avšak predpokladá dosť veľkú ekonomiku, takže sa dvojnásobné množstvo kapitálu a práce použije pri produkcii rovnakým spôsobom, ako existujúce vstupy a preto sa vyprodukuje dvojnásobok.

Druhý predpoklad sa týka iných vstupov než je kapitál, efektivita a práca, ako napríklad pozemky a prírodné zdroje. Tento model ich zanedbáva tieto vstupy pri výrobe. Ak by sme ich chceli zobrať do úvahy, znamenalo by to, že by sme pri dvojnásobnom kapitále a efektívnej práci nemuseli vyprodukovať dvojnásobok Napríklad kvôli zmene ceny surovín pri zväčšenom dopyte a podobne. V praxi sa ukazuje, že prírodné zdroje nie sú hlavným obmedzením rastu.

Zo spojenia týchto dvoch predpokladov vyplýva, že konštantné výnosy z rozsahu pre produkčnú funkciu sú rozumná aproximácia.

Tento predpoklad nám umožňuje pracovať s produkčnou funkciou v takzvanej *silnej forme.* Ak konštantu c = 1 / AL dosadíme do rovnice produkčnej funkcie, tak dostaneme: $F(\frac{K}{AL},1)=\frac{1}{AL}F(K,AL)$ , kde $\frac{K}{AL}$ je množstvo kapitálu pripadajúceho na jednotku efektívnej práce. Ak $Y=F(K,AL)$ je výstup, potom $\frac{Y}{AL}$ je množstvo produkcie na jednotku efektívnej práce.

Položme $k=\frac{K}{AL}$ a $y=\frac{Y}{AL}$ a $f(k)=F(k,1)$ , teraz vieme napísať vzťah v tvare: $y=f(k)$ Takže máme vyjadrené množstvo produkcie na jednotku efektívnej práce ako funkciu kapitálu na jednotku efektívnej práce.

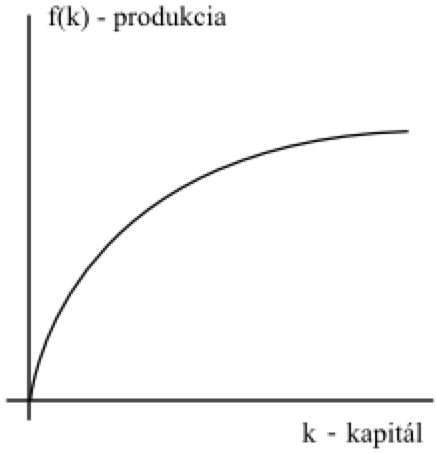
Intuícia za týmto vyjadrením je taká, že si predstavíme ekonomiku rozdelenú na AL malých ekonomík každá s 1 jednotkou efektívnej práce a $\frac{K}{AL}$ jednotkami kapitálu. Keďže produkčná funkcia má konštantnú návratovú hodnotu, každá z týchto malých ekonomík vyprodukuje $\frac{1}{AL}$ toho, čo by vyprodukovala ekonomika ako celok. Takže množstvo produkcie na jednotku efektívnej práce závisí iba na množstve kapitálu pripadajúceho na jednotku efektívnej práce a nie na veľkosti ekonomiky. Predpokladáme, že silná forma produkčnej funkcie spĺňa:

$$f(0)=0,\, f'(k)>0,\, f''(k)<0$$ [9]

Ďalej predpokladáme, že funkcia spĺňa tzv. *Inadovu podmienku*:

$$\lim_{k\to 0} f'(k) = \infty,\ \lim_{k\to\infty} f'(k) = 0$$

Priebeh tejto funkcie teda vyzerá takto:




## 8.2.3. Vývoj vstupov do produkcie

Ostatné predpoklady sa týkajú toho, ako sa menia zásoby kapitálu, pracovnej sily a znalostí v priebehu času. Čas sa berie ako spojitý, takže hodnoty týchto premenných sú definované v každom časovom okamihu. Počiatočné hodnoty kapitálu, pracovnej sily a znalostí sa považujú za dané. Predpokladáme, že dostupná pracovná sila sa časom zväčšuje (počet ľudí pribúda) rovnako ako sa zväčšuje efektivita (ľudia časom získavajú skúsenosti). Koeficienty rastu pracovnej sily a znalostí sú konštantné:

$$\frac{dL}{dt}=nL(t)$$

$$\frac{dA}{dt}=gA(t)$$

kde $n$ a $g$ sú exogénne parametre. Z rovníc vyplýva, že obidve premenné rastú exponenciálne.

9 Viď [10] strana 9

Vyprodukované statky sú rozdelená na spotrebu a investície. Podiel statkov získaných z produkcie, ktorý bude použitý na investície, *s*, je tiež exogénna a konštantná premenná. Jedna jednotka vyprodukovaných statkov, ktorá je vyčlenená na investície sa berie ako jedna jednotka nového kapitálu. Ďalej predpokladáme, že kapitál sa časom znehodnocuje. Koeficient δ, teda miera  akou dochádza  k strate hodnoty je konštantná. Takže prírastok kapitálu v čase vyjadríme takto:

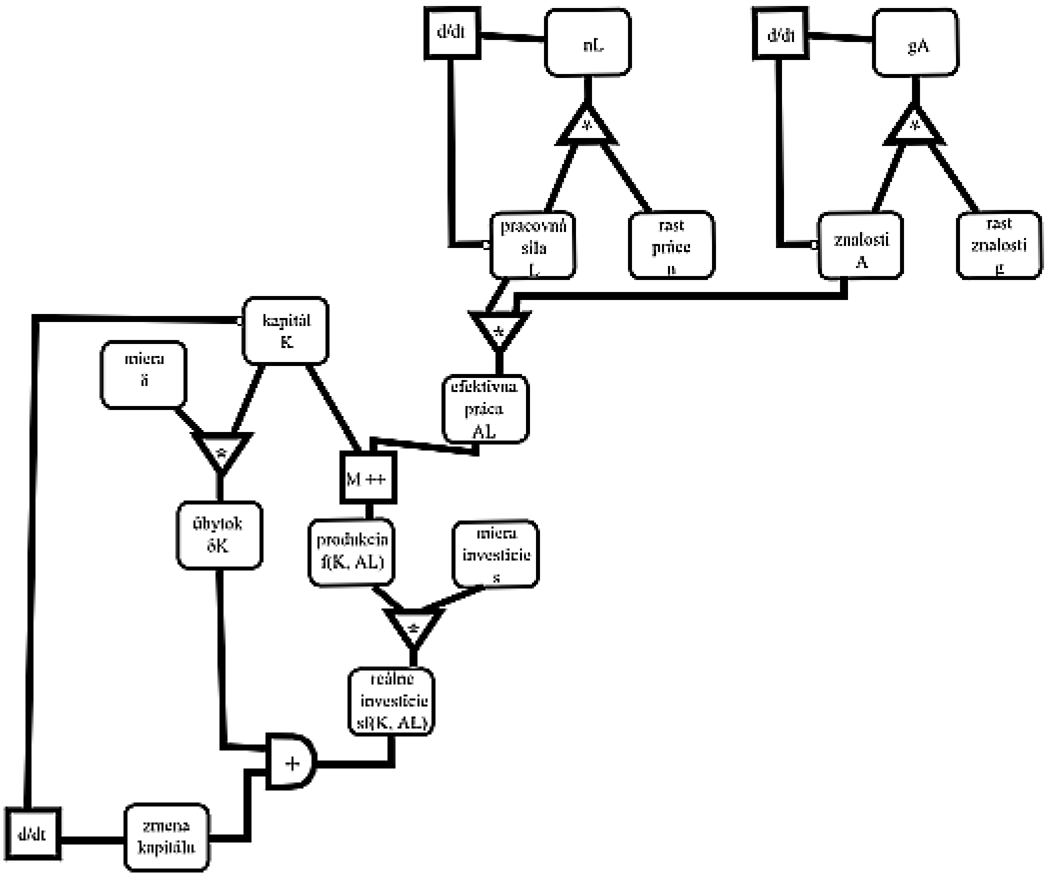
$$\frac{dK}{dt}=sY(t)-\delta K(t)$$

Zmena kapitálu je rovná rozdielu nového kapitálu z investícií a znehodnotenej časti kapitálu. Na základe uvedených vzťahov zostrojíme kvalitatívny model pre algoritmus QSIM.

## 8.3. Kvalitatívny model pre QSIM

### 8.3.1. Väzby modelu

Na základe vyššie spomenutých matematických vzťahov vytvoríme kvalitatívny model pre algoritmus QSIM, nahradením operácií a funkcií za kvalitatívne väzby. Väčšina použitých operácií ako sčitovanie, násobenie a derivácia, má priamo k sebe zodpovedajúce kvalitatívne väzby, ale závislosť množstva produkcie *Y* od kapitálu a efektívnej práce, ktorá je daná podľa produkčnej funkcie, budeme simulovať pomocou kvalitatívnej väzby, ktorá simuluje monotónne stúpajúce funkcie závislé od dvoch premenných, $M^{++}$. Pretože niektoré väzby v QSIMe majú syntaktické obmedzenia (napríklad vo väzbe vyjadrujúcej súčet musia byť **práve** dva sčítance), vystupuje v modeli viac čisto pomocných premenných, ktoré iba uchovávajú hodnoty čiastočných výpočtov. Miera investície *s* je desatinné číslo z intervalu <0, 1> , pretože nemôžeme investovať viac ako vyrobíme. Toto obmedzenie nie je zahrnuté do kvalitatívneho modelu, lebo v ňom nepracujeme so žiadnymi hodnotami vyjadrenými číslami. Tento predpoklad nezmení možné správania sa modelu, ale je dobré mať tento fakt na pamäti pri analýze perturbácií, pretože to stanovuje hornú hranicu pre exogénnu premennú *s*. Kompletné grafické zobrazenie vzťahov tohto modelu je na obrázku:

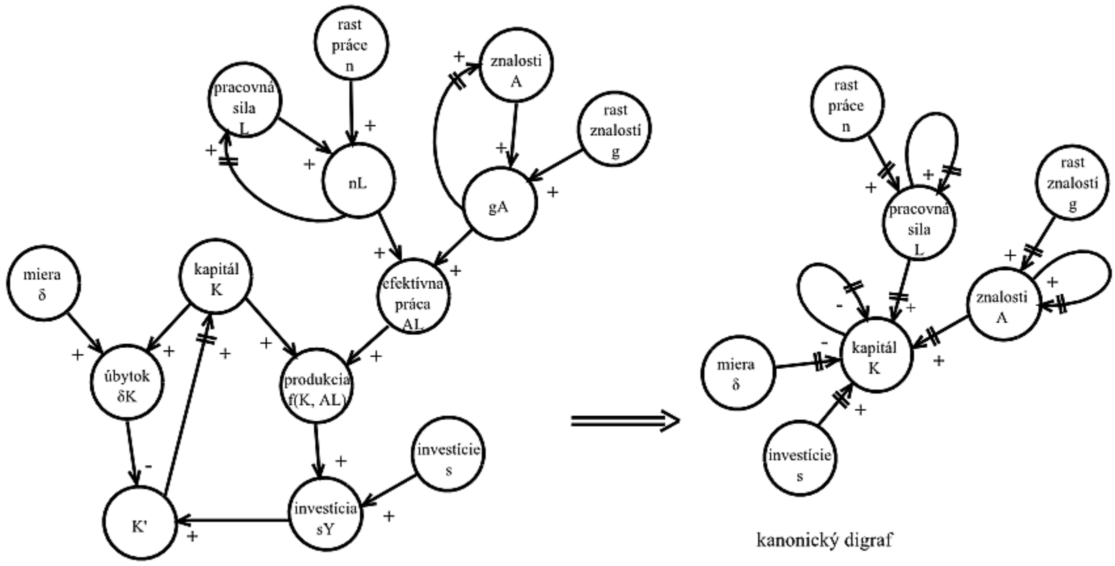



## 8.3.2. Kvalitatívna simulácia modelu

Pri simulácii tohto modelu z počiatočného stavu, ktorý má nastavené nenulové hodnoty premenných, dosiahneme dve správania. Jedno popisuje rast všetkých troch premenných do nekonečna, čo je očakávané správanie. Druhé hovorí o raste len do určitého bodu a následne o poklese kapitálu až na nulu. Toto správanie nekorešponduje so očakávaním a pravdepodobne je spôsobené tým, že v kvalitatívnom modeli nevieme presnejšie špecifikovať priebeh produkčnej funkcie.

## 8.3.3. Kvalitatívna analýza modelu

Globálne vlastnosti tohto modelu sa dajú usúdiť aj metódami kvalitatívnej analýzy z vlastností znamienkových digrafov, ktoré zodpovedajú znamienkovej matici modelu. Na obrázkoch vidíme najprv obyčajný digraf a potom z neho odvodený kánonický digraf. V kánonickom digrafe máme určitú nejasnosť, lebo z grafu vyplýva, že kapitál má spätnú väzbu na seba s kladnou aj so zápornou hodnotou. V tomto prípade znamienko výslednej väzby závisí od magnitúd oboch zúčastnených väzieb. Z priebehu produkčnej funkcie (Inadova podmienka)a z toho, že veľkosť efektívnej práce zjavne stúpa exponenciálne na rozdiel od kapitálu, môžeme predpokladať, že výsledná väzba bude negatívna. V kánonickom digrafe budú vystupovať fázové premenné kapitál *K*, pracovná sila *L* a znalosti *A* a exogénne premenné miera investícií *s*, miera znehodnocovania *δ* a koeficienty rastu pracovnej sily a znalostí - *n* a *g*.




Zo vzťahov je zrejmé, že tento model je v ekvilibriu iba ak sú všetky premenné vstupujúce do produkčnej funkcie nulové. Z kritérií odvodených pre znamienkové digrafy vyplýva, že ekvilibrium tohto grafu nie je stabilné. Pri ľubovoľne malých hodnotách kapitálu, pracovnej sily a znalostí, budú všetky tri premenné stúpať. Ak sú práca alebo znalosti na začiatku nulové, potom sa časom kapitál znehodnotí na nulu. Ďalej sa budeme snažiť zistiť detaily o správaní sa jednotlivých premenných.

## 8.4. Dynamika premenných modelu

Vývoj dvoch vstupov do produkčnej funkcie, pracovnej sily a znalostí, je daná exogénnymi premennými. Preto sa na charakterizáciu správania sa ekonómie musíme analyzovať správanie sa tretieho vstupu, kapitálu. Vrátime sa naspäť do makroekonomickej teórie a použijeme na model novú optiku. Pozrieme sa na vývoj podielu kapitálu a efektívnej pracovnej sily.

### 8.4.1. Dynamika *k*

Pretože sa ekonomika rastie v čase, je výhodné sa zamerať skôr na podiel kapitálu, ktorý pripadá na jednotku efektívnej práce, než na množstvo kapitálu v ekonomike. Tento podiel označujeme *k = K / AL*. Keďže *k* je funkciou *K, A* a *L* vieme vyjadriť deriváciu tejto premennej v čase nasledovne:

$$k'(t)=\frac{\partial k}{\partial K}K'+\frac{\partial k}{\partial L}L'+\frac{\partial k}{\partial A}A'=\frac{K'(t)}{A(t)L(t)}-\frac{K(t)}{[A(t)L(t)]^2}[A(t)L'(t)+L(t)A'(t)]$$

$$k'(t)=\frac{K'(t)}{A(t)L(t)}-\frac{K(t)}{[A(t)L(t)]}\frac{L'(t)}{L(t)}-\frac{K(t)}{[A(t)L(t)]}\frac{A'(t)}{A(t)}$$ [10]

Urobíme nasledujúce substitúcie *k = K / AL, L'/L* a *A'/A* sú parametre *n* a *g*. Z *K'* dosadíme priamo z definície a dostaneme nové vyjadrenie pre deriváciu *k* v čase.

$$k'(t)=\frac{sY(t)-\delta K(t)}{A}(t)L(t)-k(t)n-k(t)g=sY\frac{(t)}{A}(t)L(t)-\delta k(t)-nk(t)-gk(t)$$

A konečne vďaka predpokladu konštantných výnosov z rozsahu môžeme použiť produkčnú funkciu v silnej verzii a *Y/AL = f(k)*, čím dostaneme finálny tvar:

$$k'(t)=sf(k(t))-(n+g+\delta)k(t)$$

Toto je kľúčová rovnica Solowovho modelu. Hovorí, že veľkosť zmeny kapitálu na jednotku efektívnej práce je rozdielom dvoch výrazov. Prvý *sf(k)*, vyjadruje skutočné investície na jednotku efektívnej práce, lebo parameter *s* aká časť produkcie sa investuje naspäť do ekonomiky. Komplementárne 1 – s určuje časť produkcie, ktorá sa minie, *spotrebu* ekonomiky. Druhý výraz vyjadruje takzvaný *prah rovnovážnej investície* (break-even investment). Určuje množstvo investície, ktorú treba vynaložiť, aby sa pomer kapitálu a efektívnej práce zachoval. Sú dva dôvody, prečo musíme investovať, aby sme zachovali úroveň tohto pomeru. Prvým je znehodnocovanie kapitálu vyjadrené parametrom δ. Súčin δk nám určuje množstvo, ktoré potrebujeme nahradiť investíciou aby sa úroveň kapitálu zachovala. Ďalším faktorom určujúcim veľkosť rovnovážnej investície je súčet *g* + *n*. Tieto parametre vyjadrujú rast efektívnej pracovnej sily a musíme ich brať do úvahy, pretože množstvo efektívnej práce v

10 Viď [10] strana 12

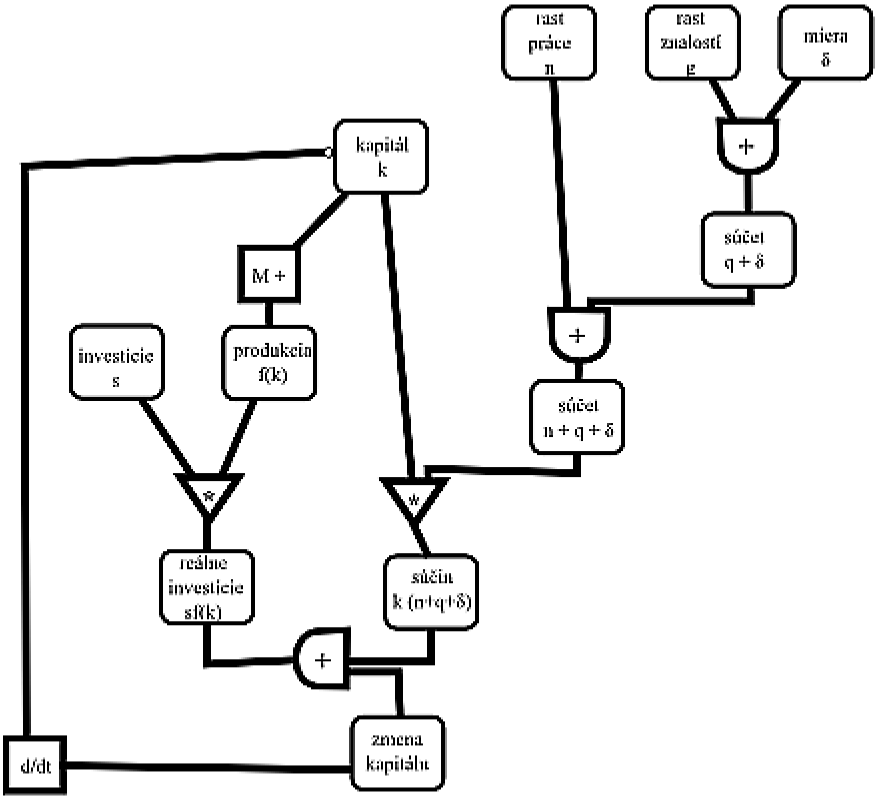
ekonomike rastie a pri fixovanom kapitále by sa množstvo kapitálu $k = K / AL$ , ktorý pripadá na jednotku efektívnej práce, znižovalo.

Na základe tohto nového vyjadrenia stavu ekonomiky, vytvoríme kvalitatívny model, analyzujeme jeho stabilitu metódami kvalitatívneho usudzovania a uvedieme analógie s fyzikálnymi modelmi, ktoré demonštrujú výhodnosť systémového nazerania na svet. Uvidíme, že určité vlastnosti systému sú vlastné jeho abstraktnej štruktúre, ktorá je nezávislá od interpretácie.

## 8.5. Kvalitatívny model pre QSIM

### 8.5.1. Väzby modelu

Opäť z uvedených vzťahov odvodíme model, zapísaný väzbami v QSIMe. Predpoklady, ktoré sme použili v predchádzajúcom modeli ostávajú v platnosti. Keďže produkčná funkcia v silnom tvare je závislá čisto od parametru *k*, väzba použitá na jej simuláciu bude $M^{+}$. Na odfiltrovanie *falošných správaní*, ktoré by QSIM vygeneroval, zavedieme obmedzenie na veľkosť premennej *produkcia y* v kvalitatívnom modeli. Priestor význačných hodnôt, ktorý ohraničuje túto premennú, je (0 ... ∞). Z priebehu produkčnej funkcie môžeme usúdiť, že význačná hodnota ∞ nebude dosiahnuteľná. Toto zapíšeme v modeli cez obmedzenie *unreachable-value*. Grafické zobrazenie modelu:




## 8.5.2. Kvalitatívna simulácia modelu

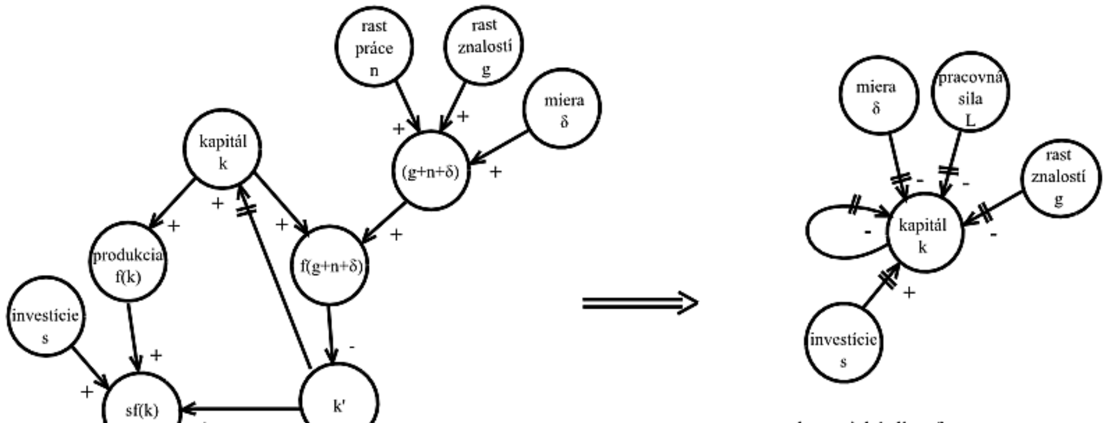
Výsledok simulácie závisí od počiatočného stavu. Ak ako začiatočný stav zoberieme nenulový kapitál môžu nastať tri prípady. Kapitál bude klesať a zastaví sa na nižšej hranici než bola pôvodná úroveň, alebo bude rásť a zastaví sa na väčšej hodnote a posledná možnosť je, že začiatočná úroveň kapitálu, pri ktorej spustíme simuláciu je rovnovážna.

## 8.5.3. Kvalitatívna analýza modelu

Na analýzu ekvilibria tohto modelu použijeme opäť znamienkové digrafy. Problém s nejasnou spätnou väzbou na premennú *k* vyriešime podľa rovnakých predpokladov, ako sme to spravili pri modeli, ktorý popisoval kapitál ako celok. Takže predpokladáme, že väzba bude záporná v konečnom dôsledku. V kanonickom digrafe tohto modelu bude jediná fázová premenná *k,* ktorá popisuje časť kapitálu pripadajúcu na jednotku efektívnej práce, a štyri exogénne premenné miera investícií *s*, miera znehodnocovania $\delta$ a koeficienty rastu pracovnej sily a znalostí - *n* a *g*.

Grafické zobrazenie digrafov:

Digrafy, ktoré pozostávajú z jednej fázovej premennej a negatívnej spätnej



kanonický digraf

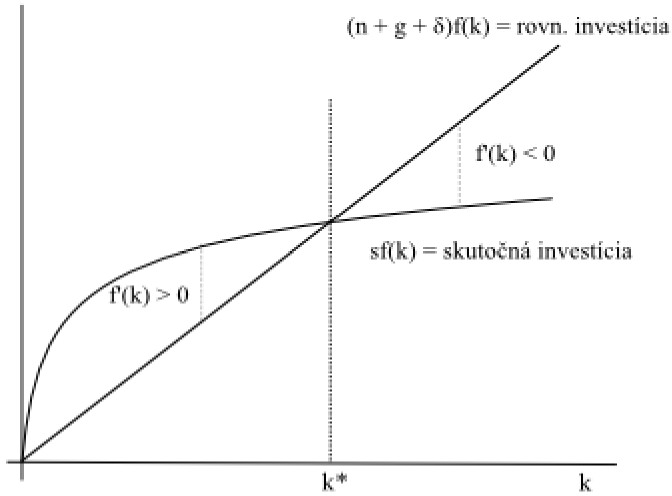
väzby, majú vždy stabilné ekvilibrium. To znamená, že pre dané exogénne parametre sa model ustáli v jednej hodnote fázovej premennej a perturbácie vyvedú model z ekvilibria len dočasne. Označme hodnotu premennej $k$ v ekvilibriu ako $k^*$. Ak umelo zvýšime hodnotu kapitálu $K$, zvýšime tým aj hodnotu časti kapitálu na jednotku efektívnej práce $k$. Systém sa vráti naspäť na pôvodnú hodnotu $k^*$. Na trvalú zmenu tejto hodnoty musíme zmeniť jednu z exogénnych premenných $n$, $g$, $\delta$ alebo $s$. Pričom kladná zmena v miere investícií posunie ekvilibriovú hodnotu $k^*$ vyššie a negatívna nižšie. Pri zvyšných exogénnych premenných je vplyv na ekvilibriovú hodnotu $k^*$ presne opačný.

Intuíciu za takýmto pôsobením nám pomôžu objasniť príklady fyzikálnych modelov s rovnakou znamienkovou štruktúrou. Uvedieme aj vysvetlenie týchto vzťahov cez skúmanie grafov funkcií vystupujúcich v rovniciach, ktoré popisujú systém.

### 8.5.4. Analógie a zdôvodnenie vplyvov

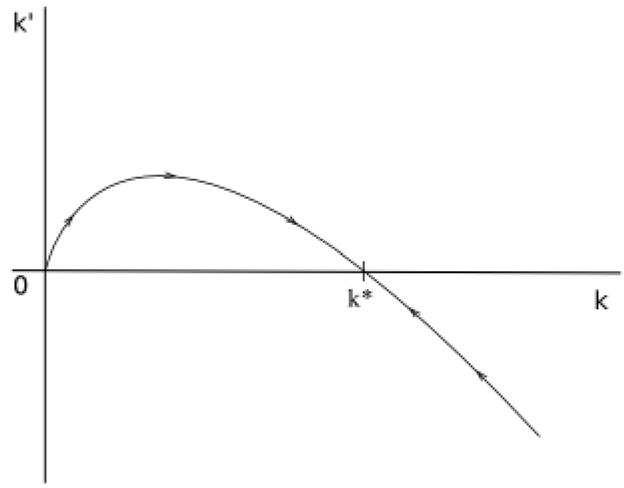
Ak sa pozrieme na znamienkový digraf uvidíme, že z hľadiska štruktúry je podobný ako digraf pre umývadlo. Rozdiel je v troch exogénnych premenných so záporným vplyvom na fázovú premennú namiesto jednej. (Toto nie je veľký problém, stačí si predstaviť umývadlo s troma otvormi). Ak použijeme túto analógiu, tak podiel kapitálu $k$ zodpovedá množstvu vody v umývadle, miera investícií $s$ zodpovedá prítoku, miera znehodnocovania $\delta$ a koeficienty rastu pracovnej sily a znalostí ($n$, $g$)

korešpondujú s priemermi otvorov v umývadle. Ak prenesieme správanie sa premenných, ktoré sme popísali pre Solowov model, na analogický model umývadla vidíme, že dostaneme presne tie isté vzťahy ako boli v modeli pre umývadlo. (Drobný rozdiel je v tom, že nepredpokladáme maximálnu možnú hodnotu n, čiže máme akoby nekonečne hlboké umývadlo.)

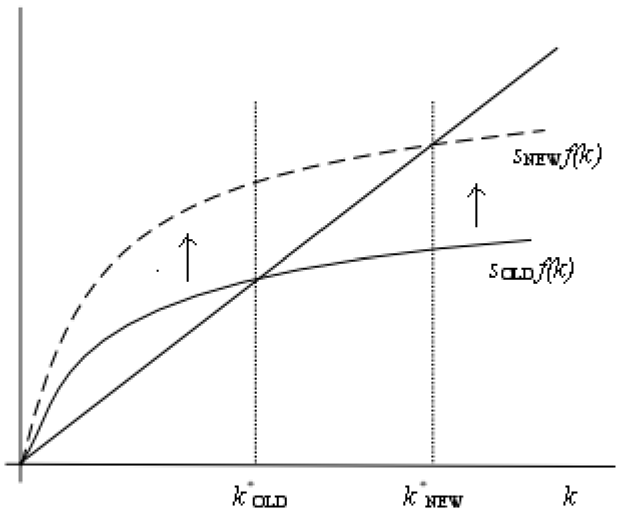



Teraz ukážeme, že naše závery na správanie sa modelu sú korektné, porovnaním s analýzou, ktorá vychádza z priebehu funkcií. Pozrime sa na vývoj výrazov *sf(k)* a *(n + g + δ)k* v závislosti od množstva kapitálu. Pretože *f(0) = 0*, skutočné investície a prah rovnovážnej investície sa rovnajú pre *k = 0*. Z Inadovej podmienky vieme, že produkčná funkcia prudko stúpa pre malé hodnoty *k*, takže bude nad lineárne stúpajúcim prahom rovnovážnej investície. Z rovnakej vlastnosti vieme, že so stúpajúcim *k* sa rast produkčnej funkcie takmer zastaví, takže určite v práve jednom bode pretne lineárne rastúci prah. Toto je ekvilibriová úroveň *k**.

Ak je hodnota *k* menšia ako táto úroveň, je derivácia *k'* kladná. Ak je hodnota *k* väčšia, je derivácia *k'* záporná. Priebeh funkcie derivácie *k* teda zabezpečuje, že systém konverguje k ekvilibriovej hodnote *k** nezávisle od počiatočnej hodnoty *k*. Graf zhŕňajúci tieto informácie vo forme *fázového diagramu* ukazuje *k'* ako funkciu *k*.




Teraz sa pozrieme na efekt perturbácie exogénnych premenných. Tieto premenné nám určujú tvar kriviek, ktoré sme zobrazili, ale nemenia ich vlastnosti. Takže ak napríklad zväčšíme mieru investície *s*, krivka produkčnej funkcie sa posunie hore a tým posunieme prienik s rovnovážnou investíciou doprava. Čiže presne podľa našej analógie, zväčšený prítok zväčší hladinu v umývadle a opäť sa ustáli v rovnováhe.




Týmto ukončíme skúmanie Solowovho modelu rastu. Makroekonomická teória analyzuje mnohé iné jeho aspekty, ale na tie už si nevystačíme s kvalitatívnym prístupom, pretože ďalšie úvahy sa opierajú o kvantitatívne vyjadrenia vzťahov, od ktorých mi abstrahujeme. Naším cieľom bolo ukázať, že kvalitatívne usudzovanie nám, vďaka analógiám, umožňuje vysvetliť základné vlastnosti dynamiky modelu jednoducho, rýchlo a v pochopiteľnej forme aj pre laikov bez matematických znalostí.

# 9. Model rozdelenia pozemkov

## 9.1. Úvod

Predchádzajúce modely boli založené na rovniciach a vzťahoch, vychádzajúcich z presne matematicky definovanej mikro a makro ekonomickej teórie. Ukázali sme, že náš prístup, vie korektne odsimulovať správanie odvodené v teórii. Navyše cez analógie s fyzikálnymi systémami sme demonštrovali názornosť tohto prístupu pri popisovaní zákonitostí. Ekonomické vzťahy, tak ako ich popisujú teórie, a ich význam sa dá ľahko vysvetliť cez korešpondujúce modely ľuďom bez dostatočných matematických znalostí.

Na druhej strane môžeme použiť intuitívne vnímanie vzťahov, ktoré sme získali pri skúmaní mikroekonómie, a prístup kvalitatívneho usudzovania na odvodenie nových modelov, ktoré formálnejšie vyjadria niektoré ekonomické javy, ktoré môžeme sledovať vo svete. Tento prístup sme z časti použili pri modeli trhu v dlhodobej rovnováhe. Z modelu firmy a modelu trhu pri pevnom počte firiem sme odvodili dlhodobý model. Aj keď v našom modeli predpokladáme spojité premenné (čo nie je realistický predpoklad), vytvorený model vyjadruje rovnaký výsledok ako úvaha v mikroekonómii. Vytvoríme ďalšie modely s využitím podobných intuitívnych predpokladov.

## 9.2. Model rozdelenia pôdy

### 9.2.1. Pozadie modelu

V súčasnej dobe sa intenzívne hľadá náhrada za fosílne palivá. Dôvodom je najmä rastúca cena ropy ako suroviny a snaha o energetickú nezávislosť. Ďalší dôvod je, že zásoby ropy sú vyčerpateľné a teda snaha o zabezpečenie alternatívneho zdroja energie pre budúcnosť. Jeden z preferovaných spôsobov je použitie biopalív. Ide o palivá vyrobené z biologického materiálu (väčšinou rastlín). Ako pri všetkých ekonomických procesoch, využitie biopalív je podmienené ich výhodnosťou. Dokiaľ bola ropa lacná a technológia spracovanie rastlín na biopalivá nákladná, využitie tohto zdroja bolo minimálne. Ale rastúca cena ropy a pokrok v technológii spravili výrobu biopaliva rentabilnou. Navyše mnohé vlády dávajú dotácie farmárom, ktorí pestujú plodiny pre výrobu biopalív, pretože je ich cieľom vyriešiť energetickú závislosť na fosílnych palivách a mnohé iné problémy spojené s využívaním fosílnych palív. Navyše tieto dotácie sú vnímané verejnosťou ako pozitívny krok. Pretože v dnešnej globalizovanej ekonomike sú skoro všetky procesy prepojené, vynorili sa v poslednom čase problémy, ktoré sú z časti pripisované preferovaniu biopalív. Ako jeden z príčin nárastu cien potravín, ktoré spôsobili nepokoje v chudobných krajinách sveta, je uvádzaná ich výroba. Kritika spočíva v tom, že pôda, ktorá je určená na pestovanie rastlín pre výrobu biopalív, mohla byť použitá na pestovanie potravín, čím by sa zvýšila ponuka a teda cena na trhu by bola nižšia. Dotácie od vlády podporovaním pestovania plodín pre výrobu biopalív, teda tlačia na zvyšovanie cien potravín. Ušľachtilý cieľ teda viedol k neželaným dôsledkom.

Samozrejme, že biopalivá nie sú jediným dôvodom tejto krízy. Na zdvíhanie ceny potravín pôsobí napríklad aj rast svetovej populácie (zvyšuje sa dopyt) alebo rast cien ropy (zvyšujú sa náklady na pestovanie a teda cena rastie). Vývoj cien na svetových trhoch je vždy kombináciou viacerých faktorov. Pretože je globálna ekonomika taká komplexná, nedá sa nikdy modelovať dokonale a musíme abstrahovať od viacerých detailov. V modeli, ktorý popíšeme, sa zameriame na vzťah biopalív, dotácií a cien potravín a od ostatných spomenutých faktorov budeme abstrahovať. Ukážeme, že model založený na predpokladoch z mikroekonomickej teórie, vyjadruje správanie, ktoré sme popísali a opäť nájdeme analógie s fyzikálnymi modelmi.

## 9.2.2. Formalizácia vzťahov v modeli

Intuitívne vyjadrené vzťahy, ktoré sme popísali, musíme pre potreby modelovania preformulovať do kvalitatívnych diferenciálnych rovníc. Základný predpoklad bude obmedzené množstvo pôdy $L_{max}$. Pôda môže byť použitá na pestovanie potravín $L_P$ alebo materiálu pre výrobu biopaliva $L_b$. Súčet týchto dvoch premenných bude v každom okamihu predstavovať všetku pôdu čo je k dispozíci $L_{max}$. Toto vyjadríme prvými dvoma väzbami: $L_{max} = L_p + L_b$ , $constant(L_{max})$ . Množstvo komodity, ktoré bude k dispozícii na trhu, priamo úmerne závisí od množstva pôdy určenej na pestovanie potrebnej suroviny (abstrahujeme od iných faktorov). Tým dostaneme dva nové vzťahy:

$$Y_p = F_1(L_p) \ , \ Y_b = F_2(L_b)$$

, ktoré budú obe v modeli vyjadrené kvalitatívnymi väzbami $M^+$. Množstvo komodity, ktoré je dostupné na trhu určuje jeho cenu (podľa *inverznej dopytovej funkcie p(*y), ktorú sme použili v modeli monopolu). Vzťahy: $Cena_p = p(Y_p)$ , $Cena_b = p(Y_b)$ . S rastúcim $Y_p$ bude premenná $Cena_p$ klesať (v súlade s mikroekonomickou teóriou), takže väzba použitá na modelovanie bude $M^-$. Analogický vzťah je medzi premennými $Cena_b$ a $Y_b$. Cena komodity na trhu bude určovať výnos, ktorý dosiahne farmár pri pestovaní danej komodity. Budeme uvažovať funkciu *Z*, ktorá bude predstavovať *zisk* dosiahnutý farmárom na jednu jednotku pôdy pri danej cene komodity (predpokladáme, že táto funkcia prepočíta náklady na pestovanie a výnos z produkcie podľa ceny na trhu). Logicky predpokladáme, že s rastúcou cenou komodity nám rastie *zisk* produkovaný na jednotku pôdy. Do funkcie *zisk* pre biopalivá vstupuje aj exogénna premenná *dotácie.* Vyjadrené rovnicami:

$$Zisk_p = Z(Cena_p) \ , \ Zisk_b = Z(Cena_b, dotácie)$$

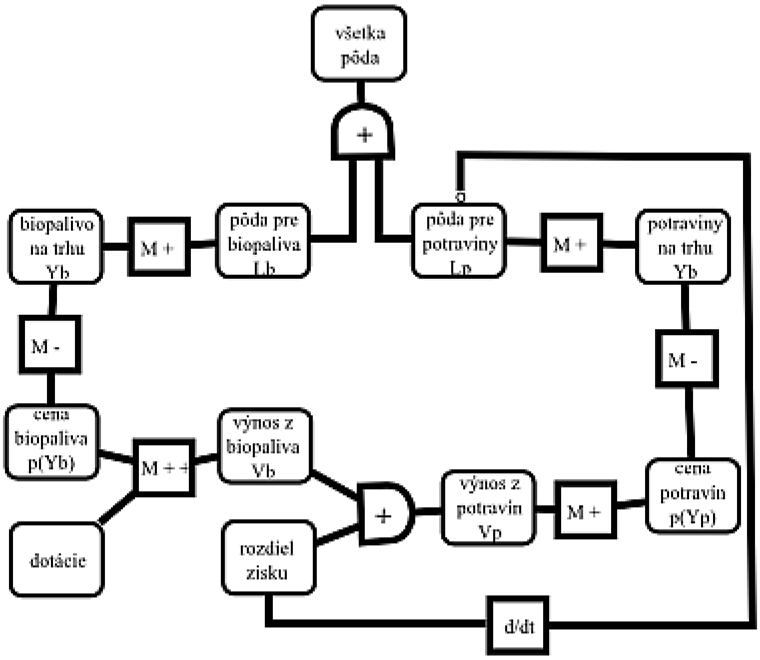
V modeli budú reprezentované väzbami $M^+$ a $M^{++}$. Racionálne uvažujúci farmár porovná výhodnosť pestovania jednotlivých komodít a rozhodne sa podľa rozdielu v ziskoch, čo bude ďalej pestovať. Toto rozhodnutie budeme reprezentovať deriváciou množstva pôdy určeného na pestovanie potravín.

$$\frac{dL_P}{dt} = a(Zisk_p - Zisk_b)$$

## 9.3. Kvalitatívny model firmy pre QSIM

### 9.3.1. Väzby modelu

Väzby boli popísané zároveň s matematickým vyjadrením vzťahov. V modeli použijeme len jednu deriváciu na určenie zmeny rozdelenia pôdy medzi komodity. Grafické zobrazenie modelu:



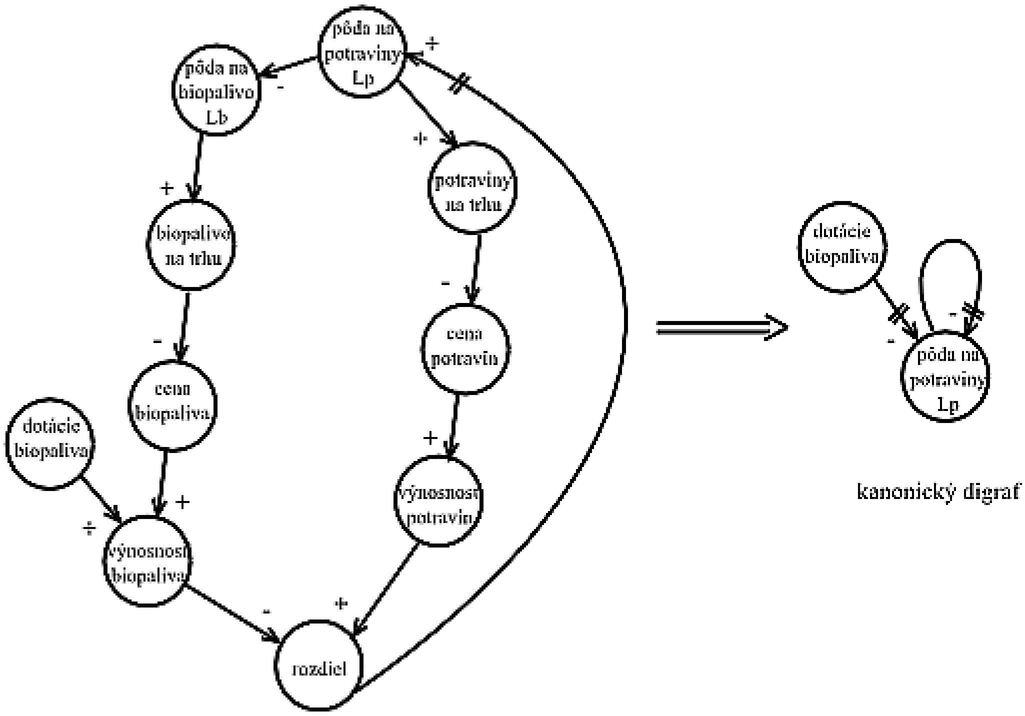

Vo väzbe určujúcej súčet premenných $L_b$ *a* $L_P$ zadáme korešpondujúce hodnoty, ktoré nám zabezpečia, že ich súčet bude vždy $L_{max}$. Takto sa zmena v premennej $L_P$ premietne do premennej $L_b$. Podobne korešpondujúce hodnoty zavedieme pre ostatné premenné. Pomôže nám to odfiltrovať správania, ktoré by v realite nemohli nastať.

## 9.3.2. Kvalitatívna analýza modelu

Začiatočný stav simulácie bude predpokladať, že všetka pôda sa používa na produkciu potravín a dotácie na výrobu biopaliva sú nenulové a exogénne. Simulácia nám vráti jedno možné správanie pre model. Množstvo pôdy vyčlenenej na potraviny klesá a množstvo pôdy určenej na biopalivá rastie dokiaľ sa model nedostane do ekvilibria, kde sa rovná ziskom pri produkcii oboch komodít. Na tomto modely je zaujímavejší vývoj ostatných premenných. Cena potravín rastie s poklesom pôdy $L_P$ a cena biopaliva klesá. Pre tento model je jedna úroveň množstva pôdy $L_P$, pri ktorej je generovaný rovnovážny zisk z oboch komodít.

### 9.3.3. Kvalitatívna analýza modelu

Stabilitu ekvilibria tohto ekvilibria určíme zo znamienkových digrafov:




Pretože máme pôdu pre biopalivá určenú ako závislosť od množstva pôdy pre potraviny, dostaneme len jednu fázovú premennú v kanonickom digrafe, do ktorej vedú dve slučky. Vládne dotácie podiel pôdy pre potraviny posúvajú nižšie (a teda ceny potravín vyššie). Obidve spomínané slučky sú záporné takže máme opäť systém s podobným kánonickým digrafom ako umývadlo. Z neho vidíme, že ekvilibrium je stabilné, takže perturbácia stavu len dočasne zmení rozdelenie pôdy. Systém sa sám vráti na optimálnu úroveň. Na trvalú zmenu tejto úrovne, je potrebné, aby zmena nastala v exogénnej premennej *dotácie,* alebo v priebehu funkcií, ktoré určujú ceny a zisk. Napríklad ak zvýšime dotácie pre výrobu biopaliva, tak sa zníži množstvo pôdy využívanej na pestovanie potravín.

### 9.3.4. Analógie a zdôvodnenie vplyvov

Model z hľadiska štruktúry korešponduje s modelom spojených nádob. Dve prepojené nádoby s tekutinou, v ktorých sa hladina ustáli na úrovni, v ktorej sa vyrovnajú tlaky. V analógii je objem vody množstvo pôdy a tlak je zisk generovaný komoditou pestovanou na pôde. Tak ako pri systéme nádob je objem vody pevne daný, tak aj v našom modeli (a aj v realite) je množstvo všetkej pôdy konečné (hranica $L_{max}$). Dôležité je si uvedomiť, že tak ako zvýšenie tlaku v jednej nádobe vedie k posunu hladiny v druhej, tak aj ovplyvnenie výnosnosti jednej komodity (dotácie) sa odrazí na zmene rovnovážnej hladiny a teda ovplyvní ceny oboch komodít. Preto zväčšovanie dopytu po biopalivách viedlo k rastu cien potravín.

Do modelu by sme mohli pridať ďalšie premenné (napríklad náklady na produkciu komodity, cena ropy, ktorá by ovplyvňovala dopyt po biopalivách, alebo populácia, ktorá by ovplyvňovala dopyt po potravinách), ale ak by boli exogénne iba by vstupovali do výpočtu „tlakov“ (zisk) a nemenili by model kvalitatívne.

# 10. Záver

## 10.1. Zhrnutie výsledkov práce

V práci sme demonštrovali použiteľnosť kvalitatívneho usudzovania na popisovanie ekonomických vzťahov. Snahou bolo poskytnúť návod ako rýchlo sprostredkovať princípy, ktoré sú popísané v týchto teóriách, človeku bez predchádzajúcich ekonomických alebo matematických znalostí. Prostredníctvom analógií s fyzikálnymi modelmi sme sa snažili nájsť intuitívne ľahko pochopiteľné vysvetlenia vyjadrovaných vzťahov. Ukázali sme, že vieme analyzovať niektoré základné prvky z ekonomickej teórie (firma, spotrebiteľ, trh, monopol) a že existujú štrukturálne paralely s modelmi umývadla a pružiny. Korektnosť týchto analógií sme podopreli analýzou znamienkových digrafov, ktoré boli vytvorené k spomenutým modelom. Pri popisovaní modelov a hľadaní ich globálnych vlastností sme narazili aj na praktické obmedzenia vyplývajúce z príliš všeobecného pohľadu kvalitatívneho usudzovania.

Na základe takto vybudovanej intuície sa dá pokračovať vo vytváraní modelov, ktoré sú viac späté s pozorovaniami reálneho sveta a a zároveň majú oporu v teórii. Ako príklad takéhoto modelu je posledne uvedený model rozdelenia pozemkov. Takéto popisovanie reálnych procesov je prínosné pre spoločenskú diskusiu. V demokracii sa rozhoduje na základe názoru väčšiny a rozhodnutie môže byť dobré, iba ak je občan správne informovaný a chápe dôsledky navrhovaných riešení. V spoločnosti sa však človek špecializuje a nie každý človek má potrebné ekonomické vzdelanie. Chceli sme ukázať, že prístup kvalitatívneho usudzovania môže byť riešením, ktoré poskytne platformu na jasné, rýchle a korektné popisovanie procesov pre ľudí s menej exaktným zameraním. V budúcnosti by sa dalo zamerať na rozširovanie množstva spoločenkých a ekonomických javov popísaných týmto formalizmom a vysvetlených cez optiku analógií.

## 10.2. Prílohy

Na priloženom CD sa nachádzajú zdrojové kódy popísaných modelov ako aj výstupy z ich simulácie algoritmom QSIM.

# 11. Použitá literatúra.

1. M. Caha, Systémy pro všední den, Gemmapress, Praha 1999.
2. M. Takáč, Kvalitatívne modelovanie a simulácia, Vydavaeľstvo UK Bratislava 2003.
3. M. Takáč, Fixed Point Classification Method for Qualitative Simulation, rigorózna práca FMFI UK, 2001.
4. B. Kuipers, Qualitative Reasoning: Modeling and Simulation with incomplete Knowledge, MIT Press, Cambridge, MA, 1994.
5. B. Kuipers and col., QSIM: The Program and its Use, Department of Computer Science, University Texas at Austin, 1994.
6. QSIM Applications and Extensions, http://www.cs.utexas.edu/users/qr/qsim-users.html.
7. Y. Ishida, A Qualitative Analysis on Dynamical Systems: Sign Structure, Memoirs of the Kyoto University, Volume 54 Part 1, 1992.
8. Pavel Brunovský, Mikroekonómia, nepublikované skriptá z predmetu Mikroekonómia FMFI UK odbor Efm, http://www.iam.fmph.uniba.sk/skripta/brunovsky2/.
9. Hal R. Varian, Microeconomic analysis 3rd edition, W. W. Norton & Company, Inc. New York 1992.
10. David Romer, Advanced Macroeconomics McGraw-Hill Companies, Inc 1996.