

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

ŠKOLA MLADÝCH MATEMATIKOV
BAKALÁRSKA PRÁCA

2023
LENKA ČAKURDOVÁ

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

ŠKOLA MLADÝCH MATEMATIKOV
BAKALÁRSKA PRÁCA

Študijný program: Aplikovaná informatika
Študijný odbor: Informatika
Školiace pracovisko: Katedra aplikovanej informatiky
Školiteľ: Mgr. Pavel Petrovič, PhD.

Bratislava, 2023
Lenka Čakurdová



ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Lenka Čakurdová
Študijný program: aplikovaná informatika (Jednoodborové štúdium, bakalársky I. st., denná forma)
Študijný odbor: informatika
Typ záverečnej práce: bakalárska
Jazyk záverečnej práce: slovenský
Sekundárny jazyk: anglický

Názov: Škola mladých matematikov
The School of Young Mathematicians

Anotácia: Edícia "Škola mladých matematikov" bola založená v roku 1961 na podnet Ústredného výboru Matematickej olympiády, ktorá vtedy v Československu už desať rokov úspešne prebiehala. Bola určená stredoškolským žiakom, rozširovala a prehľbovala ich matematické vedomosti a prinášala rad zaujímavých príkladov.

Cieľ: Cieľom záverečnej práce je vytvorenie webovej aplikácie, ktorá bude zverejnená on-line a ktorá umožní riešiť vybrané úlohy z jednej zbierky ŠMM pomocou počítača. Aplikácia umožní budovať riešenie krok za krokom bez toho, aby bola predpísaná jediná správna postupnosť, čiže aplikácia umožní konštrukciu riešenia zo základných operácií podľa výberu používateľa. Takto aplikácia nahradí tradičný postup riešenia pomocou papiera a ceruzky a ponúkne dynamickejší a flexibilnejší postup a tiež podporu pre používateľa vo forme teoretických poznatkov, ak to bude potrebovať. Konkrétna zbierka ŠMM, ktorá bude takto spracovaná bude vybratá po dohode so študentom.

Literatúra: Škola mladých matematiků, Jednota československých matematikov a fyzikov, 1961 - 1988, dostupné on-line: Czech Digital Mathematics Library, <https://dml.cz/handle/10338.dmlcz/403423>.
Zuzana Majeríková: Interaktívna výuková webová aplikácia na riešenie úloh o pravdepodobnosti, bakalárska práca, FMFI UK, 2016.
Tomáš Žitňanský: Interaktívna výuková webová aplikácia na riešenie úloh o matematických hrách, bakalárska práca, FMFI UK, 2016.

Kľúčové slová: webová aplikácia, matematika, riešenie úloh

Vedúci: Mgr. Pavel Petrovič, PhD.
Katedra: FMFI.KAI - Katedra aplikovanej informatiky
Vedúci katedry: doc. RNDr. Tatiana Jajcayová, PhD.

Dátum zadania: 01.09.2022

Dátum schválenia: 17.10.2022

doc. RNDr. Damas Gruska, PhD.
garant študijného programu



Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

.....
š t u d e n t

.....
v e d ú c i p r á c e

Čestné vyhlásenie

Čestne prehlasujem, že som túto bakalársku prácu vypracovala samostatne s použitím uvedených zdrojov.

V Bratislave

.....

Pod'akovanie

Týmto by som chcela poďakovať školiteľovi Mgr. Pavlovi Petrovičovi, PhD. za užitočné rady a pomoc pri tvorbe bakalárskej práce.

Abstrakt

Cieľom bakalárskej práce bolo navrhnuť a implementovať webovú aplikáciu určenú pre žiakov strednej školy. V aplikácii sú obsiahnuté teoretické poznatky a úlohy vychádzajúce z publikácie zo série Škola mladých matematikov - Kombinatorika [1]. Webová aplikácia Kombinatorika poskytuje prostredie na riešenie úloh pomocou interaktívnych nástrojov bez nutnosti použitia papiera. Používateľ má v aplikácii možnosť precvičiť si úlohy zahŕňajúce rôzne témy kombinatoriky s gradáciou náročnosti. Riešenie úloh je budované krok po kroku s následnou možnosťou kontroly správnosti výsledku. Aplikácia Kombinatorika je dostupná on-line cez webový prehliadač.

Kľúčové slová: webová aplikácia, kombinatorika, výučbový softvér, kombinácie

Abstract

The aim of the bachelor thesis is to design and implement a web application for secondary school students. The application includes theoretical knowledge and tasks based on the publication from the series School of young mathematicians - Combinatorics [1]. Web application provides an environment for solving tasks using interactive tools without the use of paper. Users have the opportunity to practice tasks which include various topics of combinatorics with gradation of difficulty. The solution of the task is built step by step with the subsequent possibility of checking the correct result. Application Combinatorics is available online via a web browser.

Keywords: web application, combinatorics, educational software, combinations

Obsah

1	Úvod	1
2	Východiská	3
2.1	Prehľad teórie	3
2.1.1	Škola mladých matematikov	3
2.1.2	Kombinatorika - základné pojmy	4
2.1.3	Didaktický softvér	8
2.1.4	Zásady tvorby didaktického softvéru	8
2.2	Predchádzajúce práce	9
2.2.1	Interaktívna výuková webová aplikácia na riešenie úloh o pravdepodobnosti	9
2.2.2	Interaktívna výuková webová aplikácia na riešenie úloh o matematických hrách	10
2.2.3	Výukový program demonštrujúci matematický princíp	11
2.2.4	Výuka kombinatoriky na strední škole s využitím webových stránok	12
2.3	Existujúce podobné aplikácie	13
2.3.1	Mathigon - The Mathematical Playground	14
2.3.2	Symbolab	15
2.3.3	Brilliant	16
2.3.4	Microsoft 365 - riešenie matematických úloh v nástroji OneNote	16
2.4	Použité technológie	17
2.4.1	math.js	18
2.4.2	jQuery	18
2.4.3	Bootstrap - šablóna Flatly	18
2.4.4	MathJax	18
2.4.5	Firebase	18
3	Špecifikácia funkcionality	19
3.1	Teoretická časť	20
3.2	Sady úloh	21
3.3	Prihlasovanie	22

4	Návrh	23
4.1	Technológie	23
4.2	Návrh používateľského rozhrania	24
4.2.1	Teoretická časť	25
4.2.2	Prostredie na riešenie úloh	26
4.2.3	Nástroje na riešenie úloh	29
4.2.4	Prehľad o postupe prihláseného používateľa	32
4.3	Prihlasovanie do aplikácie	33
4.4	Dátový model	34
4.4.1	Collection <i>Users</i>	35
4.4.2	Collection <i>Tasks</i>	35
4.5	Ukážka riešenia úlohy v aplikácii	35
5	Implementácia	39
5.0.1	Prihlasovanie používateľov cez Google účet	39
5.0.2	Ukladanie úloh do databázy Firestore	40
6	Testovanie aplikácie	43
	Záver	45
	Literatúra	47
	Príloha	49

1. Úvod

Online technológie, edukačné nástroje či aplikácie sú dnes už neodmysliteľnou súčasťou výučby. Ponúkajú mnoho výhod pre žiakov a učiteľov a zlepšujú zážitok zo vzdelávania. Online aplikácie poskytujú interaktívne vzdelávacie prostredie, ktoré zapája žiakov do procesu výučby alebo do riešenia úloh dynamickejšim spôsobom v porovnaní s tradičnými metódami, ako napríklad pero a papier. Dôraz sa kladie na vizualizáciu konceptov a problémov pomocou rôznych interaktívnych nástrojov, hier alebo videí. To je dôležité aj v oblasti matematiky, kde žiaci vedľa jednoduchšie uchopiť rôzne abstraktné pojmy a vzorce pomocou vhodnej vizualizácie, kde sú využívané napríklad grafy, vykresľovanie geometrických tvarov, či virtuálne objekty.

Výhodou online edukačných aplikácií je ich dostupnosť a flexibilita. Sú tvorené najmä ako webové alebo mobilné aplikácie a používateľ k nim má prístup v podstate kdekoľvek a kedykoľvek, čo mu umožňuje postupovať samostatne vlastným tempom a riadiť si svoj vzdelávací proces. Dôležitou súčasťou je tiež monitorovanie progresu používateľa, čo následne umožňuje pedagógom aj žiakom sledovať zlepšenia aj chyby a motivovať ich do ďalšieho vzdelávania. Výhodou pri riešení úloh a kvízov je okamžitá spätná väzba, kontrola správnosti a upozornenie na chyby. To umožňuje študentom reflektovať svoje schopnosti a učiť sa z vlastných chýb v reálnom čase.

V súčasnosti existuje veľké množstvo online platforiem, aplikácií či kalkulačiek určených na výučbu matematiky. Pokrývajú širokú škálu matematických disciplín, poskytujú podrobnú teóriu, interaktívne lekcie a kvízy na precvičenie vedomostí. Mnohé z nich obsahujú aj časť zameranú na kombinatoriku a pravdepodobnosť. Vo väčšine prípadov ide o kalkulačky, ktoré po dosadení hodnôt vypočítajú faktoriál, permutácie, kombinácie či variácie, alebo aplikácie obsahujúce kvízy s otázkami s možnosťou výberu odpovede. Len malé množstvo z nich obsahuje interaktívne riešenie komplexnejších úloh a možnosť postupného budovania riešenia. To ma inšpirovalo pri výbere témy mojej bakalárskej práce a odboru matematiky, ktorú spracúva.

Cieľom bakalárskej práce je navrhnúť a implementovať webovú aplikáciu na riešenie kombinatorických úloh. Aplikácia bude primárne určená pre žiakov strednej školy, ale aj

pre každého so záujmom precvičiť si kombinatoriku a získať nové vedomosti. V aplikácii bude dostupná základná teória kombinatoriky a interaktívne prostredie na riešenie úloh vybraných z publikácie *Kombinatorika* [1]. Navrhnutá aplikácia nie je primárne určená na výučbu v škole, ale na dopĺňujúce štúdium a precvičenie si úloh.

Aplikácia by mala byť pre používateľov jednoducho dostupná, preto som zvolila implementáciu webovej aplikácie dostupnej cez internetový prehliadač. Dizajn aplikácie by mal byť minimalistický a prehľadný, bez rušivých elementov. Používanie aplikácie by malo byť intuitívne a motivujúce. Žiak by si mal rýchlo osvojiť ovládanie nástrojov dostupných v interaktívnom prostredí na riešenie úloh a mal by sa v aplikácii jednoducho orientovať. Prostredie na riešenie úloh by malo byť navrhnuté tak, aby žiak mohol úlohu vyriešiť viacerými spôsobmi, ak to úloha dovoľuje.

Úvodnou kapitolou bakalárskej práce je kapitola *Východiská*, ktorá obsahuje analýzu publikácie, z ktorej som čerpala, následne stručnú teóriu kombinatoriky obsahujúcu pojmy a princípy využívané v úlohách. Kapitola zahŕňa dôležitý pojem didaktický softvér, jeho špecifické vlastnosti a základné zásady jeho tvorby. Následne opisuje podobné predchádzajúce záverečné práce a tiež už existujúce aplikácie určené na výučbu matematiky a riešenie matematických úloh s dôrazom na interaktivitu. Ďalej tiež stručne vymenúva technológie využité pri tvorbe aplikácie spolu s vlastnosťami vhodnými pre tento typ softvéru.

Nasleduje časť venovaná návrhu a implementácií aplikácie. Obsahuje špecifikáciu funkcionality softvéru, následne návrh používateľského rozhrania zahŕňajúci rôzne scenáre, ktoré môžu nastať pri používaní aplikácie. Obsahuje tiež podrobný popis nástrojov na riešenie úloh, dátový model využitý v databáze a diagramy. Ďalej tiež popisuje implementáciu daného návrhu aplikácie.

Ďalšou kapitolou bakalárskej práce je kapitola *Testovanie*, v ktorej je vyhodnotený výsledok testovania webovej aplikácie so žiakmi strednej školy. Poslednou kapitolou je *Záver*, obsahujúci záverečné zhrnutie celej bakalárskej práce.

2. Východiská

2.1 Prehľad teórie

2.1.1 Škola mladých matematikov

Séria kníh Škola mladých matematikov predstavuje zbierku 61 zväzkov o matematike. Táto edícia bola založená v roku 1961 na podnet Ústredného výboru Matematickej olympiády. Obsah kníh sa zameriava najmä na stredoškolské vedomosti, no stretneme sa v nich aj s témami vysokoškolskej matematiky. Každý zväzok predstavuje jednu konkrétnu problematiku z oblasti matematiky, obsahuje prehľadnú teóriu a následné vysvetlené príklady a bohaté množstvo cvičení pre hlbšie pochopenie témy a vyskúšanie si rôznych variácií úloh. V mojej bakalárskej práci čerpám teóriu a zadania úloh z jedného zväzku z tejto série - 45. zväzok s názvom Kombinatorika.

Publikácia Kombinatorika [1] vyšla v roku 1980 a je určená všetkým záujemcom matematiky, ktorí majú základné vedomosti týkajúce sa množín a zobrazení. V knihe sa postupuje od jednoduchších pojmov a úloh k zložitejším konceptom a kombinovaným úlohám. Prvých 5 kapitol knihy pokrýva tradičnú stredoškolskú matematiku - kombinatoriku. Prvá a druhá kapitola preberá permutácie, variácie a kombinácie bez opakovania, faktoriál, kombinačné číslo, Pascalov trojuholník. V tejto časti sa nachádzajú pomerne jednoduché úlohy na pochopenie týchto pojmov, s podrobne vysvetleným postupom riešenia a zavedením vzorcov. 3. kapitola sa zaoberá binomickou vetou, odvodzovaním vzorca a dôkazmi. Vo 4. kapitole sú zavedené pojmy permutácie, variácie a kombinácie s opakovaním. V každej z týchto kapitol je niekoľko podrobne rozobra- ných úloh s riešením a na konci kapitol sa nachádza množstvo cvičení s možnosťou kontroly správnosti riešenia vo výsledkoch na konci knihy. 5. kapitola obsahuje riešenia komplexnejších kombinatorických úloh, ktoré využívajú všetky dosiaľ nadobudnuté vedomosti.

Nasledujúce kapitoly 6, 7 a 8 sa sústreďujú na princíp zapojenia a vypojenia. Kapitola 9 je zameraná na úlohy využívajúce kombinatorické princípy pri riešení pravde- podobnosti a štatistickej fyziky. Posledná kapitola 10 obsahuje zaujímavé úlohy určené pre olympiády vybrané zo zahraničných zdrojov.

Celou knihou sa tiahne 29 hlavných úloh, ktoré začínajú od 5. až po poslednú 10. kapitolu a vysvetľujú dôležité princípy ku každej téme podľa kapitoly. Na konci kapitol sa nachádzajú cvičenia pre čitateľa už bez vysvetlených postupov, no ich správne výsledky je možné skontrolovať na konci knihy v sekcii Výsledky cvičení.

V mojej práci spracujem niekoľko úloh, ktoré budú vybrané z hlavných úloh knihy ale aj z cvičení. Zadania úloh budú vybrané tak, aby čo najzaujímavejšie ilustrovali jednotlivé kombinatorické princípy a aby ich následné interaktívne riešenie bolo pre používateľa aplikácie motivujúce a pútavé.

2.1.2 Kombinatorika - základné pojmy

Matematická disciplína kombinatorika skúma podmnožiny prvkov konečnej množiny s nejakými definovanými vlastnosťami. Základné kombinatorické úlohy spočívajú v hľadaní počtu prvkov, ktoré spĺňajú zadané vlastnosti. Hlbšie štúdium kombinatoriky sa začalo približne v 16. storočí, najmä v oblasti hazardných hier. Hráči skúmali pravdepodobnosť výhry či možné výskyty číselných hodnôt pri hode kockou. Neskôr tento odbor začal skúmať aj iné matematické otázky a v súčasnosti sa úlohy s kombinatorickými problémami vyskytujú najmä v teórii pravdepodobnosti, tiež informatike, teórii čísel, geometrii a algebre. V kombinatorike poznáme niekoľko základných tried, do ktorých prvky vieme rozdeliť. V týchto triedach sú rozhodujúce dve hlavné charakteristiky - dôležitosť poradia prvkov a možnosť opakovania prvkov. Vzniknú teda skupiny :

- **kombinácie** - nezáleží na poradí, bez opakovania prvkov
- **kombinácie s opakovaním** - nezáleží na poradí, s opakovaním prvkov
- **variácie** - záleží na poradí, bez opakovania prvkov
- **variácie s opakovaním** - záleží na poradí, s opakovaním prvkov
- **permutácie** - bijektívne zobrazenia množiny na samú seba
- **permutácie s opakovaním** - možnosť opakovania prvkov

Pri vyčísľovaní počtu prvkov týchto skupín sa využívajú kombinatorické pravidlá súčtu a súčinu. Definície pojmov a príslušné vzorce čerpám zo zdrojov Kombinatorika a teória grafov [2], Výuka kombinatoriky na strední škole s využitím webových stránok [3].

Kombinácie

Predstavujú neusporiadané výbery k prvkov z n -prvkovej množiny. Počet takýchto kombinácií sa vyjadruje **kombinačným číslom**. Toto číslo sa označuje $C(n, k)$ alebo $\binom{n}{k}$. Nazývame ho tiež **binomický koeficient**.

Súčet čísel v n -tom riadku Pascalovho trojuholníka :

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$$

Kombinácie s opakovaním

Predstavujú neusporiadané výbery k prvkov z n -prvkovej množiny, no prvky sa môžu opakovať. Preto musia byť prvky vždy dostupné v dostatočnom množstve, teda pre každý druh najmenej k prvkov. Počet kombinácií s opakovaním sa označuje $C'(n, k)$. Tento počet sa vyjadrí ako:

$$C'(n, k) = \binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}$$

Permutácie

Permutácie predstavujú bijektívne zobrazenie množiny na samú seba. Počtom permutácií hľadáme počet všetkých týchto možných zobrazení. Pre množinu M , $|M| = n$ počet permutácií $P(M_n)$ vyjadruje vzorec :

$$P(M_n) = n!$$

Permutácie s opakovaním

Permutácie s opakovaním z n prvkov je usporiadaná k -tica zostavená z týchto prvkov tak, že každý sa v nej vyskytuje aspoň raz. Číslo n vyjadruje počet rôznych prvkov, niektoré z nich sa môžu opakovať. Čísla k_1, k_2, \dots, k_n označujú počet opakovaní jednotlivých prvkov. Platí, že $k = k_1 + k_2 + \dots + k_n$. Vzorec pre výpočet permutácií s opakovaním:

$$P'(k_1, k_2, \dots, k_n) = \frac{(k_1 + k_2 + \dots + k_n)!}{k_1! k_2! \dots k_n!}$$

Variácie

Variácie k -tej triedy z n prvkov predstavujú k -členné usporiadané skupiny z n prvkov také, že každý prvok sa v nich vyskytuje najviac jedenkrát. Počet všetkých k -variácií z n prvkov označujeme symbolom $V(n, k)$. Vzorec pre výpočet:

$$V(n, k) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Variácie s opakovaním

Variácie množiny M_n s opakovaním prvkov predstavujú usporiadané k -tice, v ktorých

sa prvky množiny môžu opakovať. Počet všetkých k -variácií s opakovaním množiny M_n budeme označovať symbolom $V'(n, k)$. Vzorec pre výpočet:

$$V'(n, k) = n^k$$

Princíp inklúzie a exklúzie

Princíp inklúzie a exklúzie, alebo princíp zapojenia a vypojenia je v kombinatorike technikou počítania, ktorá reprezentuje výpočet počtu prvkov v zjednotení konečných množín. Základný vzťah je symbolicky reprezentovaný ako:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Všeobecne teda platí výraz :

$$\begin{aligned} \left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| &= |A_1| + |A_2| + \dots + |A_n| - \\ &|A_1 \cap A_2| - \dots - |A_{n-1} \cap A_n| + \\ &|A_1 \cap A_2 \cap A_3| + \dots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n| = \\ &\sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{l \in \binom{[n]}{k}} \left| \bigcap_{i \in l} A_i \right| \end{aligned}$$

Na začiatku výpočtu sčítame počty prvkov jednotlivých množín (každú môžeme chápať ako prienik systému pozostávajúceho z jedinej množiny) a striedavo odpočítavame a pripočítavame prieniky všetkých dvojíc, trojíc, štvoríc, atď.

Ilustračný príklad:

Koľko z čísel 1, 2, ..., 30 je deliteľných niektorým z čísel 2, 3, 5 ?

Riešenie:

Čísel deliteľných 2 bude $30/2 = 15$, deliteľných 3 bude $30/3 = 10$ a deliteľných 5 bude $30/5 = 6$. Dohromady teda $15 + 10 + 6 = 31$ - to ale nie je správny výsledok! Musíme si uvedomiť, že čísla, ktoré sú deliteľné zároveň dvomi z čísel 2, 3, 5 sme započítali dvakrát, teda ich počet musíme od výsledku odpočítať. To sa týka čísel deliteľných 2 a 3, $2 \times 3 = 6$, tých bude $30/6 = 5$, následne čísel deliteľných 2 a 5, $2 \times 5 = 10$, tie sú $30/10 = 3$ a na záver čísel deliteľných 3 a 5, $3 \times 5 = 15$, ich počet je $30/15 = 2$. Po odčítaní týchto čísel od výsledku zistíme, že čísla, ktoré sú deliteľné zároveň 2, 3, 5 sme trikrát pripočítali a trikrát odpočítali, teda ich na koniec musíme ešte raz pripočítať. Bude to len jedno číslo $30/(2 \times 3 \times 5) = 1$. Celkovo nám teda vyjde, že z čísel 1, 2, ..., 30 je $6 + 10 + 15 - 5 - 3 - 2 + 1 = 22$ deliteľných niektorým z čísel 2, 3, 5.

2.1.3 Didaktický softvér

Pedagogický softvér v širšom ponímaní je každý softvér uľahčujúci prácu učiteľa. Je to softvér vyvinutý na podporu učenia sa, poznávania a na rozvoj informačnej gramotnosti. [4] Predstavuje najmä aplikácie, ktoré poskytujú používateľom zaujímavé prostredie na skúmanie, modelovanie, vzdelávanie, tento softvér má spestriť vyučovanie, či pomôcť používateľom zdokonaľiť v konkrétnej problematike. Takéto programy sú vytvárané profesionálnymi programátormi ale aj študentmi vysokých škôl. Na tento typ softvéru sa zameriavam vo svojej bakalárskej práci. Edukačný softvér sa klasifikuje do viacerých kategórii [5]:

- podľa poznávacieho procesu
- podľa typu licencie
- podľa typu autorstva
- podľa spôsobu práce
- podľa účelu použitia
- podľa úlohy počítača
- podľa vzdelávacej paradigmy
- podľa predmetu výučby
- podľa veku adresáta
- iné ...

Klasifikácia podľa vzdelávacej paradigmy zahŕňa inštruktívnu paradigmu, objaviteľskú paradigmu, oslobodzujúcu paradigmu a paradigmu hypotéz. Paradigma hypotéz predstavuje princípy konštruktivismu založené na teóriách Piageta a Poppera. Tieto princípy by som chcela tiež využiť vo svojej bakalárskej práci. Princíp konštruktivismu sa zakladá na tom, že učiteľ, v tomto prípade edukačný softvér, len poskytne žiakom vhodné prostredie a žiak následne sám skúma a konštruuje riešenia problémov využívaním svojich vedomostí.

2.1.4 Zásady tvorby didaktického softvéru

Edukačný softvér sa v prvom rade líši od bežného softvéru tým, že má jasný edukačný zámer. Bol vytvorený za účelom vzdelávania, čo ho predučuje, na používanie pri dosahovaní edukačných cieľov na rozdiel od iného komerčného softvéru. [6] Na to, aby bol tento softvér vhodný a užitočný pre žiakov a pedagógov, musí spĺňať viacero definovaných kritérií. Dodržanie a splnenie týchto kritérií následne vplýva na záujem používateľov o danú tematiku. Výučbový softvér alebo aplikácia by mala poskytovať motivujúce prostredie, v ktorom by mal používať byť schopný sám riadiť svoj vzdelávací proces. Základné vlastnosti alebo zásady [7], ktorými by sa mala tvorba edukačného softvéru sú vymenované nižšie. Tvorený softvér

- by mal plniť vytýčený vzdelávací cieľ

- musí byť ľahko ovládateľný
- má mať príjemné používateľské rozhranie
- má upútať žiaka
- mal by pôsobiť na čo najviac zmyslov žiaka
- má byť primeraný vnímaniu žiaka
- má osloviť žiaka hravou a pútavou formou

Dizajn aplikácie by mal mať príjemnú primeranú farebnosť, obsahovať zaujímavé vizualizácie problémov. Softvér by mal využívať redundanciu - predostrieť používateľovi tú istú informáciu viackrát, no v inej forme, aj z iného uhla pohľadu či na inom príklade.

Následne by mal edukačný softvér spĺňať nasledujúce funkcie [8]:

- Motivačná funkcia – učebný zdroj by mal vnútorne motivovať študenta.
- Komunikačná funkcia — rozvíja slovnú zásobu.
- Regulačná funkcia – učivo je členené podľa logickej nadväznosti.
- Aplikácia funkcia – námet na využitie učiva v praxi.
- Integrovaná funkcia – medzipredmetové vzťahy.
- Inovačná funkcia – najnovšie poznatky vedy a techniky.
- Kontrolná a usmerňujúca funkcia — spätná väzba

2.2 Predchádzajúce práce

V minulosti už vzniklo viacero bakalárskych prác, ktoré sa zameriavali na tvorbu výučbových aplikácií vychádzajúcich z publikácií zo série Škola mladých matematikov. Nižšie uvádzam predošlé práce, ktoré ma inšpirovali pri písaní mojej bakalárskej práce.

2.2.1 Interaktívna výuková webová aplikácia na riešenie úloh o pravdepodobnosti

Interaktívna výuková webová aplikácia na riešenie úloh o pravdepodobnosti [9] je bakalárska práca napísaná v roku 2016. Jej autorkou je Zuzana Majeríková. Táto aplikácia predstavuje interaktívne prostredie na riešenie úloh z pravdepodobnosti, ktoré sú

vybrané z knihy O pravdepodobnosti zo série Škola mladých matematikov. Aplikácia ponúka stručnú teóriu pravdepodobnosti a kombinatoriky a tiež následné úlohy určené primárne pre žiakov stredných škôl.

Aplikácia má minimalistický dizajn a v jej komponentoch sa dá jednoducho orientovať. Príklady sú rozdelené do sérií podľa náročnosti. Pri ich riešení sa využívajú tzv. objekty, ktoré reprezentujú jednotlivé kroky a potrebné informácie k riešeniu konkrétneho príkladu. Ďalej sa pri riešení využívajú nástroje, ktoré predstavujú operácie nad vytvorenými objektami. Všetky objekty aj nástroje sú dobre farebne odlíšené a dajú sa zrozumiteľne použiť pri riešení úlohy. Súčasťou aplikácie je aj prihlásenie pomocou Google účtu, ktoré umožní rozšírenú funkcionalitu a to pridanie sa do triedy. V triede môže byť pridaných viacero používateľov a v tabuľke vedia sledovať svoje pokroky v riešení príkladov. Na obrázku 2.2 možno vidieť vyriešený príklad z prvej série úloh.

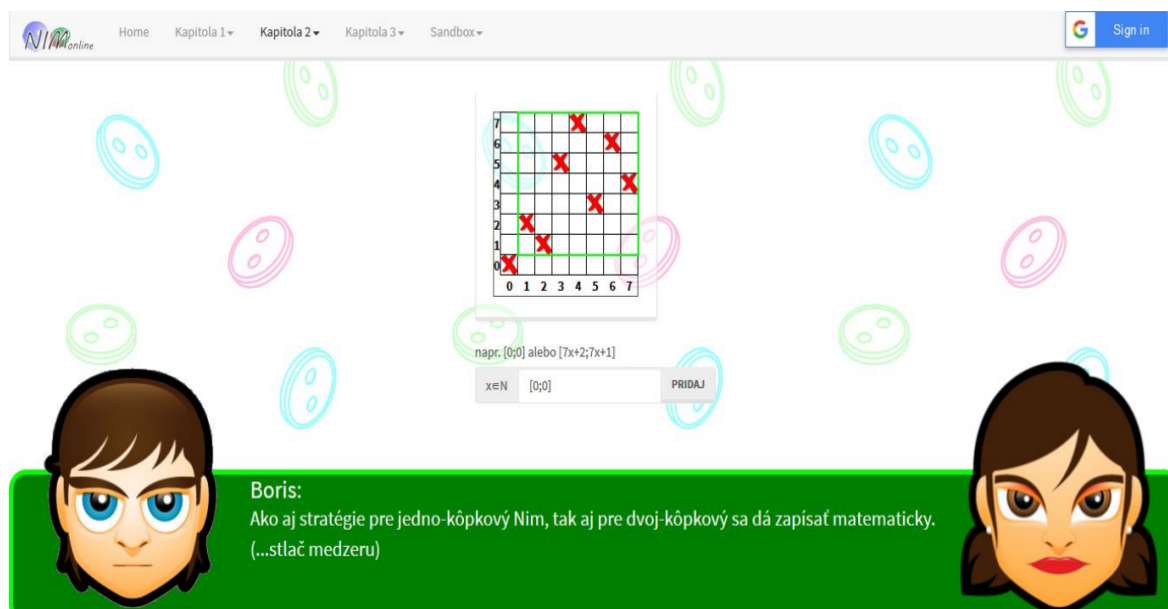
Obr. 2.2: Interaktívna výuková webová aplikácia na riešenie úloh o pravdepodobnosti [9]

V tejto práci považujem za výhody jednoduchý a čistý dizajn aplikácie, prehľadnú dostupnú teóriu a rozdelenie úloh na série, v ktorých je dostatočný počet príkladov na precvičenie si danej témy.

2.2.2 Interaktívna výuková webová aplikácia na riešenie úloh o matematických hrách

Predchádzajúcu prácu s témou zo série Škola mladých matematikov predstavuje tiež bakalárska práca z roku 2016 - Interaktívna výuková webová aplikácia na riešenie úloh o matematických hrách [10]. Autor Tomáš Žitňanský vychádza z publikácie Hry takmer matematické, ktorou sú inšpirované úlohy a stratégie využité v aplikácii. Cieľom tejto

práce bolo implementovať výučbový softvér na hľadanie stratégií pomocou hry Nim, prvá časť obsahuje tutoriál - učenie a tvorbu stratégií a následne ďalšia časť umožňuje zahrať si hru Nim v 3 rôznych náročnostiach. Sympatickou súčasťou aplikácie sú dvaja virtuálni rozprávači, ktorí sprevádzajú používateľa počas riešenia úloh. Motivujúcou funkcionalitou je tiež možnosť online hrania hry Nim v reálnom čase s iným prihláseným používateľom alebo robotom využívajúcim jeho stratégiu.



Obr. 2.3: Interaktívna výuková webová aplikácia na riešenie úloh o matematických hrách [10]

V aplikácii pozitívne hodnotím celkové grafické spracovanie, ktoré je jednoduché no zároveň farebné a pútavé, tiež spracovanie hry Nim a možnosť online hrania proti ostatným používateľom.

2.2.3 Výukový program demonštrujúci matematický princíp

Výukový program demonštrujúci matematický princíp [11] ako bakalársku prácu navrhla a napísala Monika Švaralová v roku 2015. Výsledná aplikácia obsahuje sériu úloh zameraných na odvodzovanie viet Boolovej algebry, vychádzajúcich z knihy zo série Škola mladých matematikov: Boolova algebra. Autorka navrhla použiteľnú aplikáciu dostupnú pre všetkých používateľov online, s prehľadným a príjemným dizajnom pomocou témy Paper pre Bootstrap.

V aplikácii kládla dôraz najmä na interaktivitu procesu riešenia úloh. Úlohy sú určené stredoškólakom a vysokoškolským študentom. Prostredie poskytuje úvodný tutoriál s ukážkou riešenia jednoduchého príkladu a ďalej im umožňuje samostatne voľne riešiť zadané úlohy - krok za krokom skladať a spájať axiómy, kontrolovať správnosť

krokov a aj výsledného riešenia. Funkcionalita prihlásenia ešte zlepšuje zážitok z riešenia úloh, prihlásený používateľ má uložené všetky už vyriešené úlohy a odvodené vety a tiež použitý postup ešte nedoriešenej úlohy, môže sledovať svoje pokroky. Aplikácia tiež poskytuje prihlásenie učiteľa a vytvorenie skupiny pre žiakov.



Obr. 2.4: Výukový program demonštrujúci matematický princíp [11]

Kladné vlastnosti tejto aplikácie sú čistý a moderný dizajn, jednoduché a intuitívne používanie a vysvetlenie pomocou úvodného tutoriálu a tiež možnosť prihlásenia používateľov - žiakov a učiteľov.

2.2.4 Výuka kombinatoriky na strednej škole s využitím webových stránok

Táto webová stránka na podporu online výučby matematiky [2] vznikla ako diplomová práca na Katedre didaktiky matematiky na Univerzite Karlovej v Prahe. Cieľom autorky bolo vytvoriť webovú stránku doplnujúcu komplexný webový portál pre stredoškolskú matematiku, ktorý slúži rovnako žiakom aj učiteľom pri výučbe.

Portál ako celok zahŕňa rôzne oblasti matematiky vyučované na strednej škole. Autorka Jana Farská sa sústreďuje na tému kombinatorika. Webová stránka obsahuje rozsiahlu teóriu rozdelenú na menšie celky. Teória je sprevádzaná riešenými úlohami spolu s podrobným postupom a doplnenými ilustráciami a interaktívnymi prvkami, ako napríklad hod kockou, zafarbenie pásov na vlajke či zvýraznenie čísel v riadku Pascalovho trojuholníka. Ďalej sú v každom celku dostupné pre používateľa zadania úloh na precvičenie, s možnosťou odkryť správne riešenie. Na záver celku je pripravený test na doplnenie odpovede alebo zvolenie možnosti, určený na overenie vedomostí

nadobudnutých v danom celku, ktorý sa sústreďí na konkrétnu časť kombinatoriky.

Pozitívny aspekt stránky je rozsiahlosť a odborné spracovanie učiva a množstvo príkladov na precvičenie. Ako negatívum tejto webovej stránky hodnotím nedostatok interaktivity.

The screenshot shows a web page with a blue header containing the title 'Kombinatorika' and the subtitle 'Portál středoškolské matematiky'. Below the header is a navigation bar with 'Úvod', 'Témata', and 'Kontakty'. The main content area has a left sidebar with a menu including 'Titulní strana', 'Úvod', 'Základní kombinatorická pravidla', 'Variace, permutace, kombinace', 'Variace, permutace, kombinace s opakováním', 'Kombinační čísla', 'Souhrnný test', and 'Literatura a zdroje'. The main heading is 'Kombinační čísla' with a sub-heading 'Pascalův trojúhelník'. Below this is a short text explaining Pascal's triangle and a note about highlighting elements. Two Pascal's triangles are shown side-by-side. The left one uses binomial coefficients $\binom{n}{k}$ and the right one uses numerical values. The top-left element of the left triangle, $\binom{0}{0}$, is highlighted in yellow.

Obr. 2.5: Výuka kombinatoriky na střední škole s využitím webových stránek [2]

2.3 Existujúce podobné aplikácie

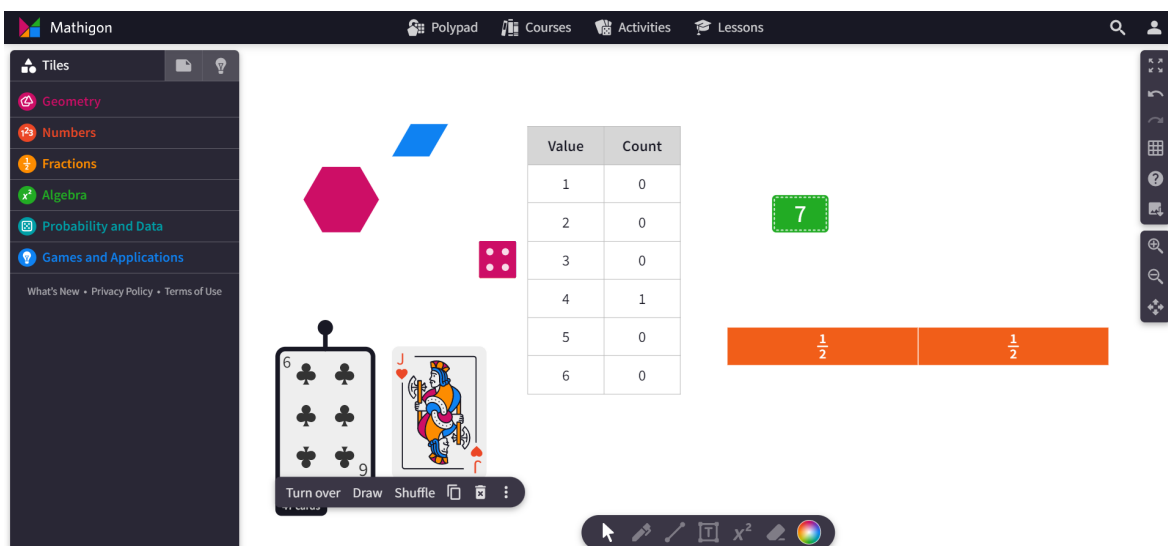
Aplikácie a rôzne nástroje na online výučbu v súčasnosti pokrývajú rôznorodú škálu tém a sú rozšírené takmer na každom predmete v školách, či užitočné pre samoukov a nadšencov. Mnohé z nich sú zamerané na oblasť matematiky, často využívajúce interaktívne prvky. Výučbové aplikácie určené najmä pre deti základných a stredných škôl vysvetľujú matematické princípy pomocou hier. Dostupné aplikácie väčšinou obsahujú textové alebo video tutoriály s vysvetlením teórie, pojmov a následne ponúkajú cvičenia s doplnením odpovede a kontrolou správnosti. Je málo aplikácií, ktoré ponúkajú používateľovi možnosť riešiť a skladať svoj postup riešenia priamo v aplikácii.

Oblasť kombinatoriky zahŕňajú do svojich kurzov takmer všetky aplikácie zamerané na výučbu matematiky. No venujú jej len malý priestor a nesústreďujú sa na možné postupy riešenia. V nasledujúcej časti uvádzam niekoľko populárnych matematických aplikácií, z ktorých som čerpala inšpiráciu pri tvorbe svojej bakalárskej práce.

2.3.1 Mathigon - The Mathematical Playground

Jednou z webových aplikácií s online kurzami matematiky je Mathigon. Aplikácia pokrýva široké spektrum tém, na výučbu využíva kurzy s popisom teórie a vysvetleniami pojmov a názorných jednoduchých príkladov, ďalej obsahuje tiež rôzne aktivity a hry na vysvetlenie matematických princípov. V aplikácii sú dostupné aj lekcie s podrobným postupom a vysvetlením úlohy, ktoré je doplnené aj interaktívnou činnosťou používateľa v tzv. Polypade.

Polypad (obr. 2.6) je interaktívne prostredie, ktoré predstavuje virtuálny papier, na ktorom môže používateľ skúšať rôzne spôsoby riešenia úloh z kurzov a lekcí, skladať postupne svoje úvahy a dopracovať sa k výsledku. Polypad obsahuje sadu rôznorodých nástrojov a objektov či obrázkov na vizualizáciu problémov, ktoré sa dajú použiť na všetky typy úloh v aplikácii. Medzi takéto pomôcky patrí napríklad pravítko, kružidlo, geometrické tvary, 3d modely, hracie karty, mince, rôzne kartičky s číslami, s ktorými sa dá interaktívne pracovať - vyhodnocovať či rozdeľovať zlomky, zobrazíť graf funkcie a podobne. Zahŕňa tiež interaktívne nástroje ako napríklad hraciu kocku, s ktorou je možné virtuálne hádzať a následne vyrátať výskyty jednotlivých čísel počas hodov, nástroj na generovanie náhodných čísel a rôzne ďalšie pomôcky. Používateľ má možnosť tieto objekty a nástroje ľubovoľne skladať a postupne riešiť zadané úlohy.



Obr. 2.6: Príklad nástrojov dostupných v Polypade v aplikácii Mathigon [12]

Aplikácia Mathigon zahŕňa aj kurzy zamerané na kombinatoriku. V kurzoch sú vysvetlené základné princípy a pojmy - faktoriál, permutácie a kombinácie. Tieto kurzy obsahujú niekoľko jednoduchých zadaných úloh spolu s riešením, no nemyslím, že je úloh dostatočné množstvo. Lekcie obsahujú niekoľko vysvetlených zložitejších úloh spojených s kombinatorikou a pravdepodobnosťou.

Táto aplikácia a najmä virtuálne prostredie Polypad predstavuje jednu z hlavných inšpirácií pre moju bakalársku prácu.

2.3.2 Symbolab

Veľmi známou a využívanou aplikáciou, ktorá je dostupná aj ako mobilná aplikácia na riešenie matematických problémov je Symbolab. Používateľ dostane po zadaní konkrétneho problému z rôznych oblastí matematiky výsledok a tiež postup riešenia. Pri zadaní problému má možnosť určiť, čo konkrétne potrebuje ako výsledok - napríklad zjednodušiť výraz, nájsť inverznú funkciu či vyjadriť danú premennú. Ak má záujem, ponúknu sa mu podobné problémy na precvičenie a lepšie pochopenie témy. Symbolab sa zaoberá riešením problémov z geometrie, algebry, a ďalších oblastí matematiky, no tiež ekonómie, chémie, fyziky a štatistiky. Tiež umožňuje vykreslenie grafov funkcií po zadaní predpisu, rôzne predpripravené kalkulátory na prepočet hodnôt a nástroje na riešenie úloh z geometrie. Po prihlásení aplikácia ponúka tiež možnosť využívať digitálny notebook, kde si používateľ môže ukladať svoje poznámky, grafy a podobne. Pre zjednodušenie riešenia sú k dispozícii aj cheat sheets, teda ťaháky, ktoré obsahujú známe matematické vzorce a pravidlá.

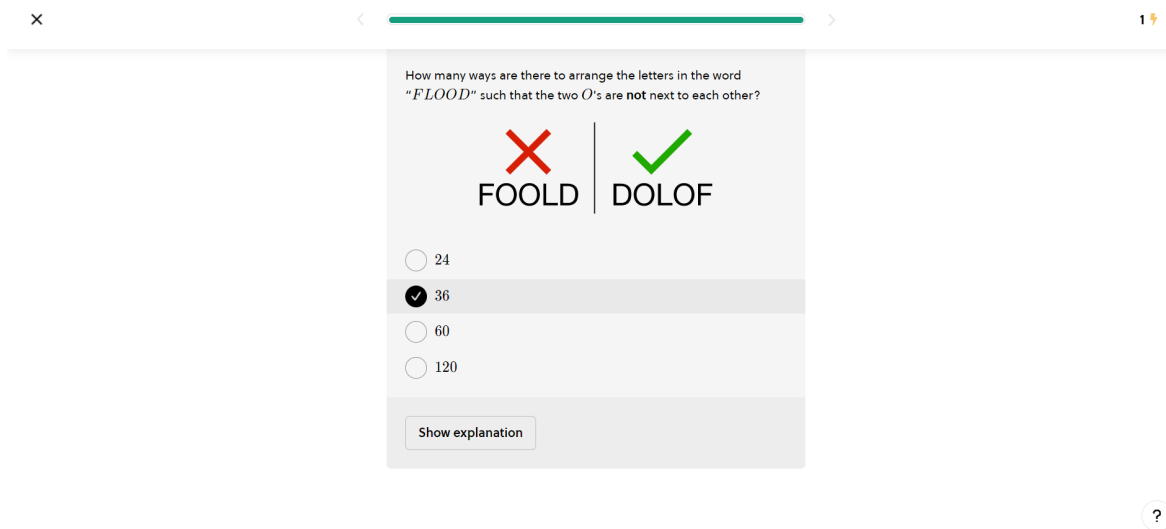
The screenshot shows the Symbolab website interface. At the top, there is a navigation bar with the Symbolab logo and various menu items like Solutions, Graphing, Practice, Geometry, Calculators, and Notebook. Below this is a dark navigation bar with subject categories: Pre Algebra, Algebra, Pre Calculus, Calculus, Functions, Linear Algebra, Trigonometry, Statistics, Physics, Chemistry, Finance, Economics, and Conversions. The main content area displays the equation $x^2 - x - 6 = 0$ and the solution steps. The solution is shown as $x^2 - x - 6 = 0 : x = 3, x = -2$. There are buttons for 'Go', 'Graph', 'Examples', 'Solution', 'Keep Practicing', and 'Show Steps'. A sidebar on the left lists subject categories, and a right sidebar contains an advertisement for Symbolab mobile apps and a 'Practice, practice, practice' section.

Obr. 2.7: Príklad hľadania riešenia jednoduchej rovnice v aplikácii Symbolab [13]

Na precvičovanie si príkladov sú pripravené cvičenia, rozdelené podľa tém. Cvičenie obsahuje zadanie úlohy a políčko na doplnenie odpovede, nápovedy a kontrola správneho riešenia sú dostupné až po registrácii/prihlásení. K niektorým vybraným témam sú pridané aj odkazy na videá, v ktorých je problematika podrobnejšie vysvetlená.

2.3.3 Brilliant

Brilliant predstavuje ďalšiu dostupnú webovú aplikáciu zameranú na online kurzy matematiky. Na absolvovanie týchto kurzov je potrebná registrácia. Po prihlásení aplikácia ponúka množstvo kurzov z rôznych tém matematiky, informatiky a ďalších odborov. Jednotlivé kurzy pozostávajú z viacerých častí. Na začiatku sa nachádza teória doplnená interaktívnymi prvkami nasledovaná úlohami na výber možnosti (obr. 2.8). Pri zadanej úlohe je tiež možnosť odkryť riešenie spolu s vysvetlením postupu. Jeden z kurzov obsahuje aj časť Kombinatorika, ktorej však venuje len stručnú teóriu a pár jednoduchých príkladov s možnosťami, ktoré pokrývajú len malú časť kombinatoriky.



Obr. 2.8: Príklad úlohy z kombinatoriky v aplikácii Brilliant [14]

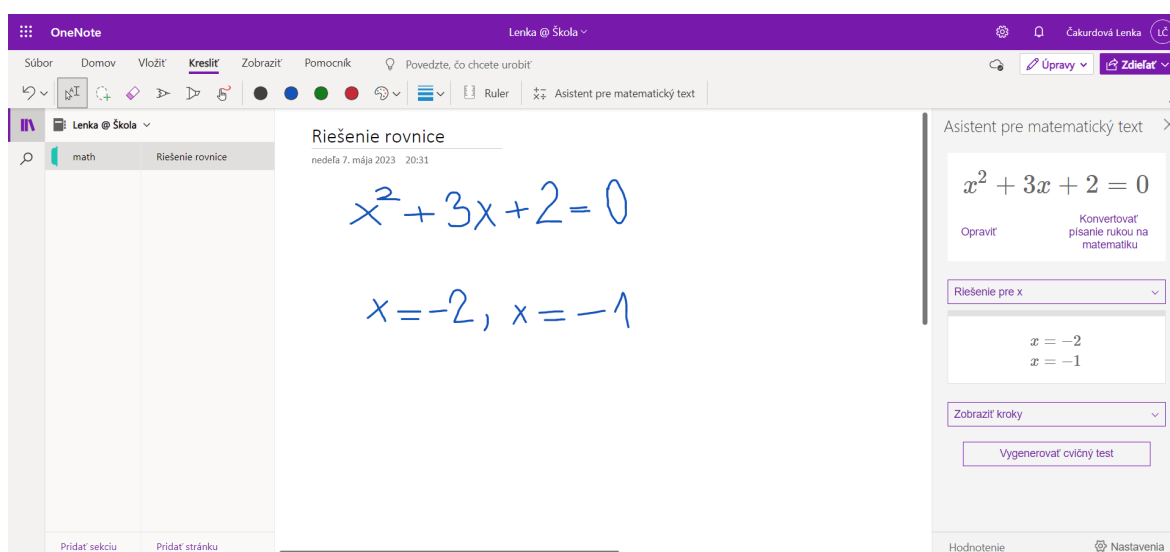
2.3.4 Microsoft 365 - riešenie matematických úloh v nástroji OneNote

Microsoft 365 pre školy je zoskupenie služieb určených zdarma pre študentov a učiteľov, ktoré podporujú efektívne štúdium a e-learning či dištančnú výučbu. Tieto služby zahŕňajú napríklad Microsoft Teams, Word, PowerPoint, Excel či nástroj OneNote a ďalšie.

Nástroj OneNote je určený na vytváranie poznámkových blokov prispôbených pre rôzne predmety. Poskytuje platformu, kde pedagógovia môžu pripravovať materiály pre študentov a tiež s nimi priamo spolupracovať na tvorbe cvičení či riešení úloh. Tento nástroj obsahuje Whiteboard tabuľu s možným zdieľaním cez link, možnosť vkladať k poznámkam obrázky, videá, linky. Umožňuje zdieľať obsah so študentami, organizovať ich prácu do viacerých notebookov, vkladať feedback. [21]

Zaujímavou súčasťou, ktorú by som analyzovala podrobnejšie, je riešenie matematic-

kých úloh s Math Assistant. Tento nástroj umožňuje rýchle vyriešenie matematických problémov. Tiež poskytuje podrobné vysvetlenie postupu riešenia krok po kroku až k správne výsledku. Matematickú rovnicu je možné písať cez klávesnicu alebo ju napísať pomocou virtuálneho pera a následne označiť. Ďalej sa rovnica vyrieši pomocou aplikácie Math Assistant. Zobrazí sa panel, kde je možné určiť ďalšie kritériá problému a tiež ukázať kroky vedúce k riešeniu. V nástroji je tiež možné vypočítať si postup riešenia nahlas pomocou Immersive Reader alebo vykresliť názorný graf. Následne je dostupná možnosť generovania kvízu v podobe Microsoft formulára s podobnými matematickými úlohami na precvičenie tohto typu úloh aj s okamžitým vyhodnotením.



Obr. 2.9: Riešenie kvadratickej rovnice v aplikácii OneNote pomocou Math Assistant

V aplikácii je výhodou možnosť zdieľania notebookov a spolupráca viacerých študentov spolu s učiteľom, teda je vhodná priamo na výučbu na hodine alebo na dištančné štúdium. Matematický asistent je praktický nástroj na riešenie rovníc a úloh, hlavnými výhodami sú dostupnosť a zrozumiteľnosť, podrobné vysvetlenie postupu riešenia.

2.4 Použité technológie

Webová aplikácia Kombinatorika je tvorená tak, aby bola čo najjednoduchšie dostupná pre všetkých používateľov. Keďže sa jedná o formu edukačného softvéru, primárnych používateľov predstavujú najmä žiaci, no aj učitelia. Aplikácia bude k dispozícii na internete bez nutnosti inštalovania. Ako hlavný programovací jazyk pri tvorbe softvéru som zvolila JavaScript.

Ďalej som využila nasledovné štandardné technológie pri tvorbe webu:

- **HTML5, CSS** - technológie na vytvorenie základnej kostry a dizajnu aplikácie

- **JavaScript** - skriptovací jazyk, ktorý umožňuje tvoriť dynamický obsah, animácie obrázkov, kontrolu komponentov

2.4.1 math.js

Math.js [15] je knižnica rozširujúca JavaScript a Node.js, je to matematická knižnica podporujúca rôzne typy výpočtov a zápis matematických výrazov. Disponuje tiež množstvom matematických funkcií, ktoré sú užitočné pre výpočty v mojej aplikácii.

2.4.2 jQuery

jQuery je JavaScriptový framework, ktorý je v súčasnosti veľmi rozšírený a využívaný. Je určený na zjednodušenie zápisu kódu a tiež interakcie HTML a JavaScriptu. Ponúka tiež rôzne funkcie animácií a efektov. Riadi sa heslom "píš menej, rob viac".

2.4.3 Bootstrap - šablóna Flatly

Bootstrap je open-source CSS framework zameraný na responzívny front-end vývoj. Obsahuje HTML, CSS a JavaScript-ové šablóny pre rôzne webové komponenty a sústreďuje sa na zjednodušenie dizajnu a tvorby rozhrania webových stránok. V mojej bakalárskej práci využívam bootstrap šablónu Flatly [16]. Ponúka jednoduchý dizajn komponentov, no niektoré vlastnosti som prispôsobila podľa svojho dizajnu. Táto šablóna uľahčuje prácu pri tvorení a dizajnovaní webovej aplikácie, pretože viacero komplexných komponentov stránky ponúka už vyhotovených.

2.4.4 MathJax

MathJax [17] je open-source JavaScriptový nástroj, ktorý umožňuje elegantné zobrazovanie matematickej notácie vo všetkých webových prehliadačoch. Využíva MathML, LaTeX and ASCIIMathML. Pre moju bakalársku prácu je veľmi vhodná na zápis matematických výrazov v aplikácii, najmä v časti Teória, no aj pri riešení príkladov.

2.4.5 Firebase

Firebase [19] je komplexná platforma poskytovaná spoločnosťou Google na vytváranie webových a mobilných aplikácií. Ponúka širokú škálu nástrojov a služieb, ktoré pomáhajú vývojárom s rôznymi aspektmi vývoja aplikácií, vrátane backendovej infraštruktúry, autentifikácie, synchronizácie dát v reálnom čase a mnohých ďalších. Vo svojej bakalárskej práci využijem služby pre autentifikáciu používateľov a tiež Firestore databázu na ukladanie a správu dát.

3. Špecifikácia funkcionality

V tejto časti dokumentu je opísaná funkcionality aplikácie, jej základné časti a správanie. Hlavným cieľom edukačného softvéru Kombinatorika je poskytnúť priestor študentom stredných škôl na interaktívne riešenie zadaných príkladov z oblasti kombinatoriky s možnosťou postupného budovania riešenia a kontroly správnosti výsledku. V aplikácii bude tiež dostupná základná teória kombinatoriky a ukážkové úlohy ku každej téme, ktoré pomôžu s pochopením danej problematiky. Táto výučbová aplikácia bude dostupná pre všetkých cez webový prehliadač.

Webová aplikácia bude pozostávať z teoretickej a praktickej časti. Teoretická časť bude obsahovať stručnú teóriu, pojmy a princípy nevyhnutné pre riešenie kombinatorických úloh. K teórii budú doplnené aj jednoduché úlohy ilustrujúce zadaný problém spolu s vysvetleným postupom riešenia pre pochopenie daného princípu. Praktická časť bude zahŕňať štyri sady úloh, rozdelené podľa tém inšpirovaných knihou zo série Škola mladých matematikov - Kombinatorika [1]. Kombinatorické úlohy bude mať používateľ možnosť riešiť priamo v aplikácii v interaktívnom prostredí dostupnom pre každú úlohu. Interaktívne prostredie bude pozostávať z pracovnej plochy a nástrojov, pomocou ktorých bude môcť vykonávať jednotlivé kroky pri riešení úlohy. Dostupné nástroje k jednotlivým úlohám sú detailne opísané v časti Návrh používateľského rozhrania. Po vyriešení úlohy bude môcť študent vpísať svoj výsledok do predvoleného políčka a odoslať na kontrolu správnosti. Počas riešenia úloh z kombinatoriky bude používateľ postupne zbierať odmeny za nadobudnutie nejakej novej schopnosti špecifickej pre danú úlohu. Tieto schopnosti mu uľahčia ďalšie riešenie nasledujúcich úloh.

V aplikácii Kombinatorika bude tiež dostupné prihlásenie používateľov. Žiak sa bude môcť prihlásiť do aplikácie a sledovať svoj pokrok v riešení kombinatorických úloh a zbieraní vedomostí. Po prvom prihlásení sa nový používateľ pridá do databázy. Prihlásenému používateľovi aplikácie sa načítajú informácie o už vyriešených alebo rozpracovaných úlohách a nadobudnutých schopnostiach. Po odhlásení sa všetky údaje aktualizujú a uložia.

3.1 Teoretická časť

Teoretická časť aplikácie bude pozostávať z trinástich stránok, ktoré budú obsahovať teóriu kombinatoriky prebratú z publikácie Škola mladých matematikov - Kombinatorika [1], ale tiež z materiálu Kombinatorika [20] a učebného textu [2]. Stránky budú obsahovať základné kombinatorické pojmy a pravidlá, ktoré sú dôležité pri riešení úloh. Teóriu budú dopĺňať aj jednoduché príklady spolu s obrázkami a interaktívnymi prvkami, ktoré budú názorne ilustrovať danú tému a slúžiť na lepšie pochopenie a praktické využitie pravidla či princípu.

Prvá úvodná stránka teórie bude vysvetľovať, čím sa zaoberá matematický odbor Kombinatorika. Bude zahŕňať históriu kombinatorických výpočtov a základné triedy, do ktorých sa rozdeľujú prvky pri definovaní kombinatorických problémov. Ďalšie dve stránky teórie budú vysvetľovať kombinatorické pravidlá súčtu a súčinu. Nasledujúce stránky definujú dôležité pojmy ako kombinačné číslo, Pascalovu formulu a Pascalov trojuholník. Ďalej budú nasledovať stránky s definíciami tried prvkov na základe dôležitosti poradia a opakovania prvkov. Poslednou témou teórie bude stránka vysvetľujúca princíp inklúzie a exklúzie alebo princíp zapojenia a vypojenia.

Všetky stránky teórie budú mať podobnú prehľadnú štruktúru. V hornej časti nad samotným textom sa bude nachádzať nadpis indikujúci pojem alebo pravidlo, ktoré sa vysvetľuje na príslušnej stránke. Ďalej sa na stránke bude nachádzať definícia pojmu a pod ňou vzorec na výpočet. Štvrtá stránka teórie bude obsahovať viacero definícií a vzorcov. Následne bude na stránke svetložltou farbou odlíšená časť, ktorá bude obsahovať ilustračný príklad na lepšie pochopenie definovaného pojmu. Časť označená nadpisom **príklad** bude obsahovať zadanie príkladu. Časť s názvom **riešenie** bude obsahovať podrobný postup riešenia príkladu. Bude zahŕňať analýzu prvkov, s ktorými sa pri riešení pracuje a vysvetlenie jednotlivých krokov. Na konci riešenia sa bude nachádzať správny výsledok. Niektoré stránky obsahujú pri zadaní príkladu aj ikony ilustrujúce tému ukážkového príkladu.

Stránka teórie, ktorá bude vysvetľovať pojem Pascalov trojuholník, bude obsahovať interaktívny prvok v podobe zobrazenia niekoľkých riadkov Pascalovho trojuholníka. Jednotlivé prvky v riadkoch budú zobrazené ako kombinačné čísla. Po prejdení kurzorom ponad prvok sa políčko zafarbí odlišnou farbou a zobrazí sa vyčíslená hodnota daného kombinačného čísla. Posledná stránka teórie bude obsahovať podrobný postup riešenia príkladu k pojmu Princíp inklúzie a exklúzie. Bude obsahovať jednoduchý ukážkový príklad a k nemu obrázok Vennovho diagramu, kde budú rozdelené prvky podľa zadania. Nad obrázkom bude legenda vysvetľujúca vlastnosti prislúchajúce jed-

notlivým častiam diagramu. Obrázok bude slúžiť na vizualizáciu problému a uľahčenie riešenia.

Všetky stránky budú obsahovať pojmy, princípy a vzorce, ktoré sú aplikované v sadách úloh dostupných na samostatné riešenie v sekcii Úlohy.

3.2 Sady úloh

Úlohy v aplikácii budú rozdelené na tri sady podľa tém z knihy Kombinatorika [1]. Prvá sada úloh bude obsahovať úlohy na zoznámenie sa so základnými pojmami kombinatoriky: faktoriál, permutácie, kombinácie a variácie bez opakovania a tiež predstaví pojem Pascalov trojuholník a počítanie s kombinačnými číslami. V tejto sade bude obsiahnutých osem jednoduchších úloh vybraných z publikácie [1]. Druhá sada úloh sa bude sústreďovať na úlohy zamerané na permutácie, kombinácie a variácie s opakovaním a komplexnejšie kombinatorické úlohy. Druhá sada bude rovnako obsahovať osem úloh. V tretej sade bude figurovať päť úloh s využitím princípu inklúzie a exklúzie. Používateľ bude môcť úlohy riešiť v ľubovoľnom poradí, no odporúčané je chronologické riešenie s postupným zvyšovaním zložitosti úloh.

Po výbere sady sa používateľovi zobrazí interaktívne prostredie na riešenie úloh. Na stránke bude v hornej časti zobrazené zadanie nasledujúcej nevyriešenej úlohy, ak nie je prihlásený alebo ešte túto sadu neriešil, automaticky bude zobrazené zadanie prvej úlohy. Medzi úlohami sa používateľ bude môcť pohybovať pomocou tlačidiel umiestnených naľavo a napravo od zadania úlohy, alebo si bude môcť vybrať konkrétnu úlohu zo zoznamu úloh. Pod zadaním príslušnej úlohy bude umiestnená pracovná plocha, ktorá bude určená na umiestňovanie nástrojov pri riešení úlohy. Nástroje bude možné po umiestnení na plochu ľubovoľne presúvať. Ponuka dostupných nástrojov na riešenie úloh bude umiestnená naľavo a napravo od pracovnej plochy. Súčasťou riešenia úlohy bude tiež kontrola správnosti výsledku. Sada nástrojov bude obsahovať pomocné nástroje na poznámky a kreslenie: vloženie textu a pero. Ďalej bude obsahovať nástroje na umiestňovanie prvkov na konkrétne pozície v postupnosti, možnosť vymenovania všetkých (alebo čiastočného počtu) možností po určení podmienok. Tiež bude obsahovať operátory ako plus, mínus a krát, a políčka na vkladanie číselných hodnôt do matematických výrazov ako zlomok, kombinačné číslo alebo faktoriál.

V hornej časti pracovnej plochy budú tlačidlá pre nápovedu, vymazanie alebo vrátenie kroku počas riešenia úlohy a tlačidlo 'Ulož postup', ktoré umožní prihlásenému používateľovi uložiť postup riešenia rozpracovanej úlohy. Na pravej strane bude tiež tlačidlo na vymazanie všetkých krokov naraz, ktoré vymaže všetko umiestnené na pracovnej ploche.

Ak prihlásený používateľ úlohu vyrieši správne, označí sa v zozname úloh ako vyriešená. Ak konkrétna úloha umožnila nadobudnutie nejakej novej schopnosti (skill) v počítaní a riešení kombinatorickej úlohy, používateľovi sa zobrazí oznámenie o získaní novej vedomosti a pridá ju do tabuľky úspechov. Pod novou vedomosťou sa rozumejú napríklad Kombinácie, teda po vyriešení úlohy zameranej na kombinácie sa táto 'skill' alebo zručnosť pridá do tabuľky v časti Môj progres.

3.3 Prihlasovanie

V aplikácii bude pre používateľov možnosť prihlásenia pomocou Google účtu. Na každej stránke sa bude v navigácii aplikácie nachádzať tlačidlo 'Prihlásiť sa s Google'. Ak sa používateľ prihlási do aplikácie, v navigácii sa automaticky zobrazí jeho meno a text na tlačidle sa zmení na 'Odhlásiť sa'. Po kliknutí na tlačidlo 'Ulož postup' všetky informácie o rozpracovanej úlohe uložia. Po správnom vyriešení úlohy sa jej informácie automaticky uložia do databázy. Prihlásený používateľ bude mať prístup ku stránke **Môj progres**, kde budú umiestnené dve tabuľky:

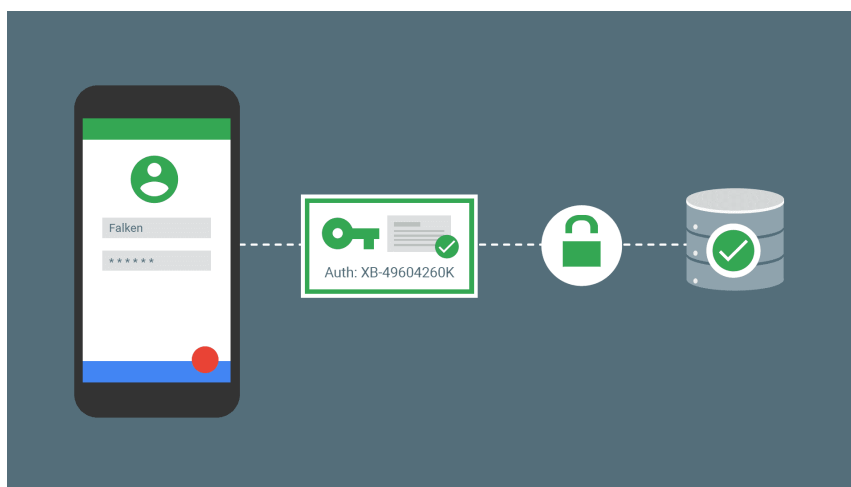
- tabuľka **Moje vyriešené úlohy** - bude poskytovať prehľad vyriešených úloh v jednotlivých sadách
- tabuľka **Moje skills** - bude obsahovať všetky dosiahnuté vedomosti, ktoré zatiaľ daný používateľ nazbieral pri riešení úloh

4. Návrh

4.1 Technológie

Na tvorbu webovej aplikácie som zvolila nasledujúce technológie, ktoré patria medzi najpoužívanejšie technológie na vývoj tohto typu softvéru. Na tvorbu základnej kostry a dizajnu aplikácie som zvolila HTML a CSS, tiež som využila Bootstrap šablónu Flatly, niektoré jej dizajnové prvky a komponenty ako navigácia, tlačidlá, modálne okná, tooltips a podobne. Pri vytváraní interaktívnych komponentov a manipuláciu s nimi využívam technológiu JavaScript a tiež knižnicu jQuery. Na zobrazovanie matematických výrazov a vzorcov v časti Teória a Úlohy som zvolila zobrazovací nástroj MathJax, ktorý umožňuje použitie matematického zápisu napísaného vo formáte TeX, LaTeX a ich následné elegantné zobrazenie vo webovej stránke.

Na autentifikáciu používateľov a ukladanie potrebných dát využívam službu Firebase [19]. Konkrétne využívam funkcie **Firestore Authentication**, ktorá poskytuje backendovú infraštruktúru služieb, s ktorými je možné komunikovať priamo z front-endu aplikácie. Tiež poskytuje ľahko použiteľné súpravy SDK a hotové knižnice používateľského rozhrania na overovanie používateľov v aplikácii. Podporuje autentifikáciu pomocou hesiel, telefónnych čísel, alebo tiež prihlásenie pomocou iných poskytovateľov alebo sociálnych služieb ako Google, Facebook a Twitter a ďalších.



Obr. 4.1: Firebase authentication [18]

Na ukladanie a správu dát o používateľoch a vyriešených úlohách využívam **Firebase Cloud Firestore**. Cloud Firestore je databáza dokumentov NoSQL, ktorá umožňuje jednoducho ukladať, synchronizovať a vyhľadávať údaje pre mobilné alebo webové aplikácie v globálnom meradle. Databáza Firestore poskytuje silné používateľské zabezpečenie. Pomocou deklaratívneho bezpečnostného jazyka je možné obmedziť prístup k údajom na základe údajov o identite používateľa, zhody vzorov údajov a podobne. Cloud Firestore sa tiež integruje s Firebase Authentication, čo ponúka jednoduché a intuitívne overenie používateľov. Výhodou tejto databázy je prístup k dátam v aplikácii aj v rámci viacerých rôznych zariadení.

4.2 Návrh používateľského rozhrania

Dizajn používateľského rozhrania je vo výučbových aplikáciách veľmi dôležitý, keďže rozhoduje o tom, ako bude používateľ interagovať so softvérom. Aplikácia by mala byť intuitívna a jednoducho ovládateľná, s príjemným minimalistickým dizajnom a prehľadnou navigáciou, tlačidlami a inými komponentmi. Používateľ by sa mal v aplikácii jednoducho orientovať a osvojiť si bez väčších problémov ovládanie nástrojov na riešenie úloh.



Obr. 4.2: Úvodná stránka aplikácie

Úvodná stránka aplikácie obsahuje uvítací text pre používateľov a odkazy na ďalšie hlavné komponenty aplikácie. Na ľavej strane úvodnej stránky sa nachádza odkaz na stránku teórie, ktorá obsahuje teoretické poznatky z oblasti kombinatoriky. Na pravej strane sa nachádza odkaz na stránku s úlohami. Všetky stránky aplikácie obsahujú totožnú navigáciu umiestnenú v hornej časti webovej stránky.

Navigácia sa skladá z piatich častí. Prvou je časť Kombinatorika, odkazuje na do-

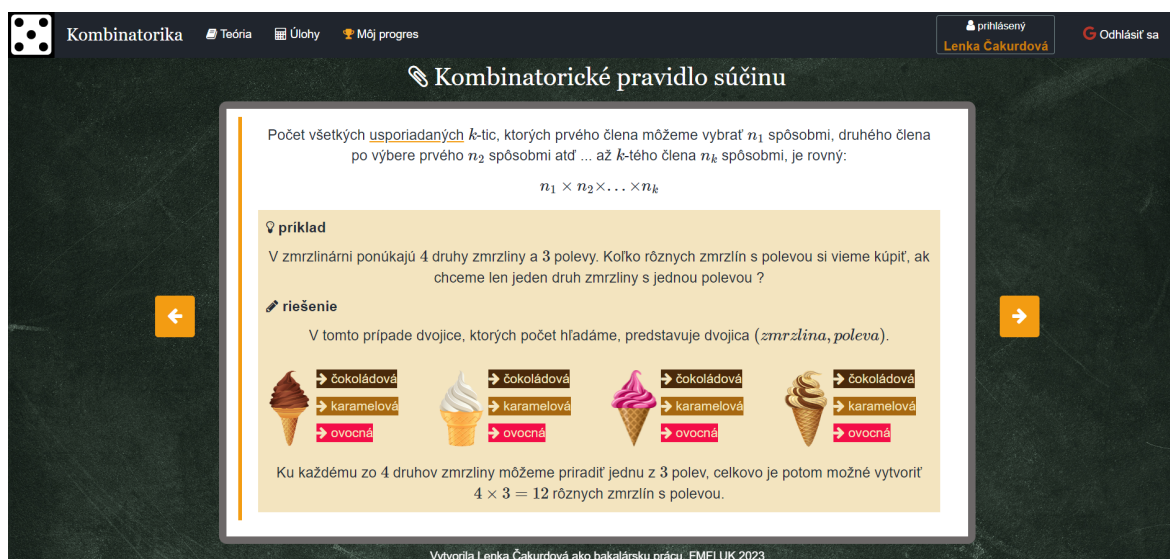
movskú stránku aplikácie. Ďalšou časťou je Teória, ktorá odkazuje na stránku obsahujúcu teóriu kombinatoriky. Tretou časťou navigácie je odkaz Úlohy, ktorý odkazuje na stránku s úlohami. Štvrtá časť navigácie Môj progres predstavuje odkaz na stránku s tabuľkami sledujúcimi progres používateľa. Piatou časťou navigácie je tlačidlo 'Prihlásiť sa s Google', umiestnené na pravej strane navigácie, ktoré umožňuje používateľovi prihlásiť sa do aplikácie.



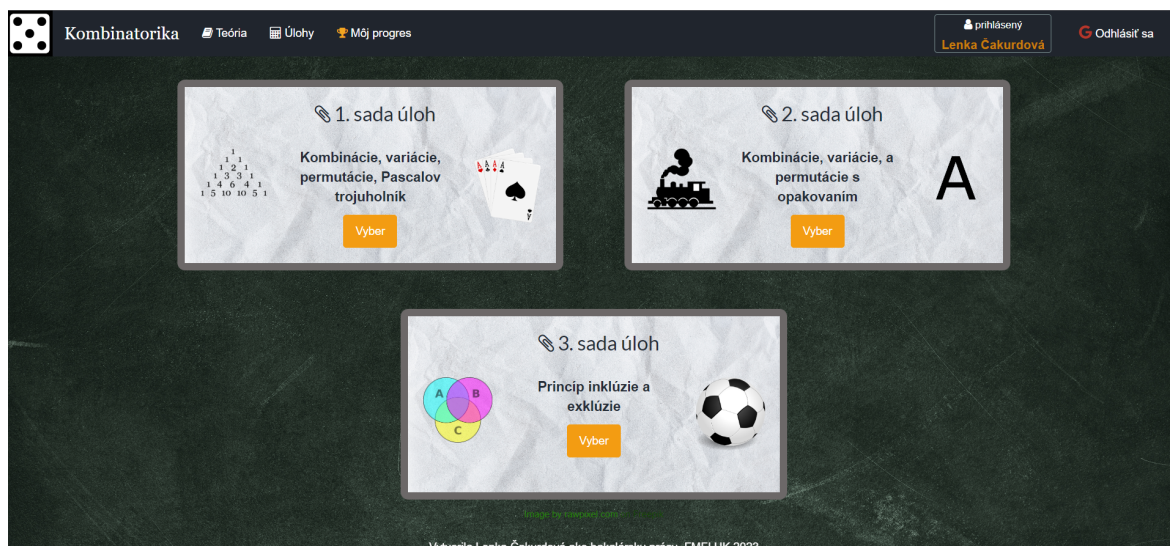
Obr. 4.3: Navigácia s ukážkou prihláseného používateľa

4.2.1 Teoretická časť

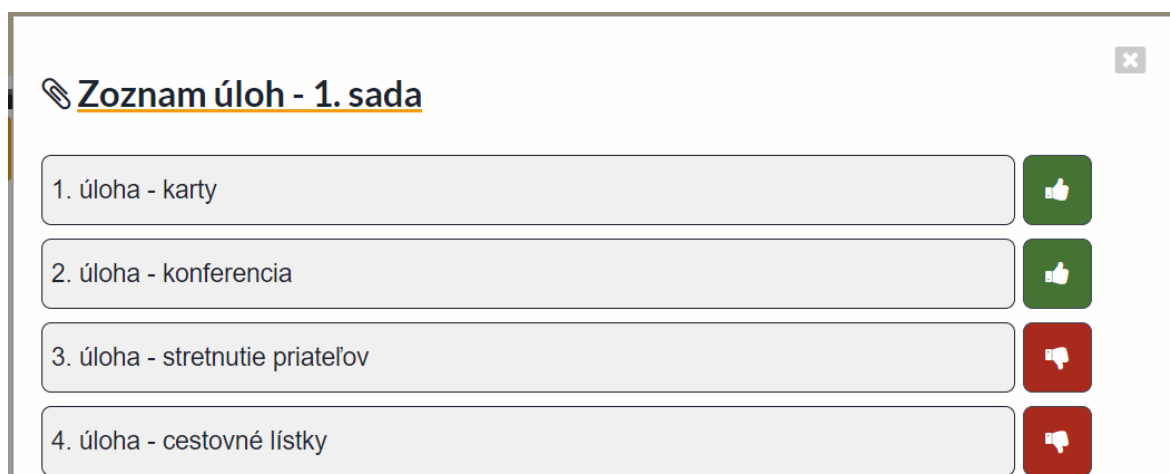
Teoretická časť aplikácie obsahuje trinásť elementov, ktoré predstavujú stránky teórie. Každá stránka teórie sa skladá z 3 častí: vľavo tlačidlo na predchádzajúcu stranu, v strede samotný text teórie a vpravo tlačidlo na nasledujúcu stranu. Obe tlačidlá sú zrozumiteľne označené šípkami v smere pretáčania stránok teórie, okrem tlačidiel pri začiatkovej a poslednej strane, ktoré sú označené krúžkom pre začiatok a krížikom pre koniec teórie. Tieto tlačidlá sú neklikateľné. Jednotlivé stránky teórie pozostávajú z týchto častí - názov témy, ktorá je na stránke vysvetlená, následne definícia a vzorec pre výpočet. Ďalej niektoré stránky obsahujú farebne oddelenú časť obsahujúcu názorný príklad, ktorý zahŕňa zadanie a postup riešenia. Niektoré stránky obsahujú ikony ilustrujúce tému príkladu alebo interaktívny prvok.



Obr. 4.4: Teória - Kombinatorické pravidlo súčinu

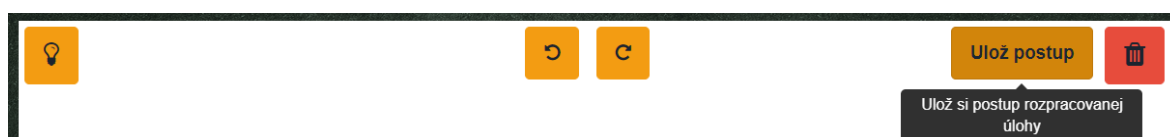


Obr. 4.6: Úlohy - výber konkrétnej sady úloh



Obr. 4.7: Ukážka Zoznamu úloh 1. sady s označením vyriešených úloh

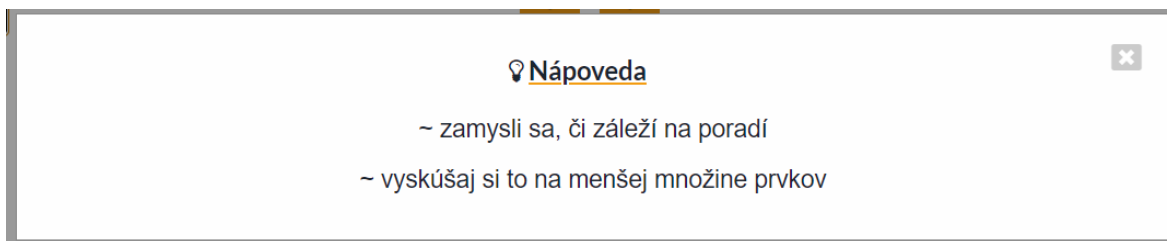
dovať svoje riešenie a sada nástrojov určených na riešenie úlohy. Medzi jednotlivými úlohami sa používateľ bude môcť pohybovať pomocou šípok alebo vybrať úlohu zo Zoznamu úloh. V hornej časti pracovnej plochy bude umiestnených päť tlačidiel (obr. 4.8) :



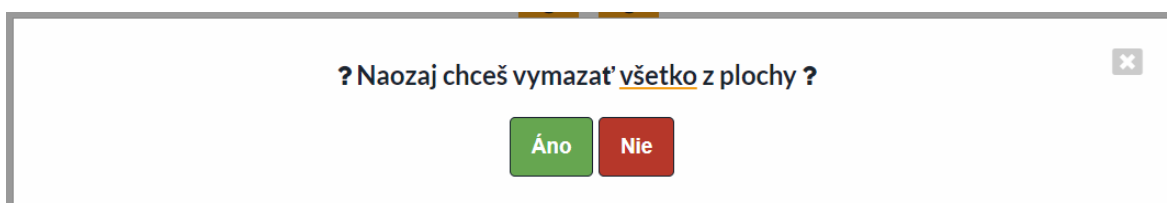
Obr. 4.8: Tlačidlá v hornej časti pracovnej plochy

Žiarovka, ktorá po kliknutí zobrazí nápovedu alebo pomôcku k vyriešeniu úlohy (obr. 4.9), 'undo' a 'redo' tlačidlá na vymazanie alebo vrátenie vykonaného kroku počas riešenia, ďalej tlačidlo 'Ulož postup' dostupné pre prihlásených používateľov,

ktoré umožní uloženie postupu rozpracovanej úlohy a tlačidlo kôš, ktoré bude slúžiť na vymazanie celej plochy, čo umožní riešenie úlohy úplne od začiatku.



Obr. 4.9: Modálne okno s pomôckou k úlohe



Obr. 4.10: Modálne okno - potvrdenie vymazania celej plochy

Ak neprihlásený používateľ klikne na tlačidlo 'Ulož postup', zobrazí sa mu upozorňovacie okno, že pre túto funkciu sa musí prihlásiť. Po kliknutí na kôš sa zobrazí na stránke modálne okno (obr. 4.10), ktoré vyžaduje potvrdenie vymazania celej plochy, keďže táto akcia vymaže všetky kroky doteraz vykonané pri riešení konkrétnej úlohy. Po prejdení myšou ponad tlačidlá sa zobrazí popis ich funkcie. Ak má prihlásený používateľ už rozpracovanú úlohu, ktorá ešte nie je vyriešená a chce opustiť stránku alebo sa odhlásiť, či prejsť na inú úlohu, zobrazí sa mu okno s otázkou, či chce odísť bez uloženia postupu. Ak klikne na 'OK', úlohu opustí, ak zvolí 'Zrušiť', môže si postup uložiť alebo pokračovať v riešení.

Ak má prihlásený používateľ rozpracovanú úlohu uloženú, po zvolení danej úlohy sa mu na plochu načíta uložený postup a môže ďalej pokračovať. Niektoré úlohy budú po načítaní obsahovať na ploche pripravené obrázky alebo objekty, ktoré sú dôležité pri riešení - napríklad úloha 8 z 1. sady, ktorá vyžaduje na vyriešenie zobrazenie Pascalovho trojuholníka. Na riešenie úloh používateľ využíva nástroje, ktoré sú uvedené a opísané nižšie. Po správnom vyriešení úlohy sa používateľovi zobrazí správa o úspešnom vyriešení a ak získal aj nejakú novú zručnosť (skill), na 2 sekundy sa mu zobrazí žlté modálne okno so správou o novej zručnosti. Informácie na stránke Môj progres sa aktualizujú.



Obr. 4.11: Prostredie na riešenie úloh s ukázkou postupu riešenia úlohy

4.2.3 Nástroje na riešenie úloh

Na pravej a na ľavej strane pracovnej plochy sú umiestnené dostupné nástroje na riešenie úloh. Nástroje sú zobrazené vo forme tlačidiel a vstupných políчков. Po prejdeí kurzorom ponad konkrétny nástroj sa zobrazí bublina s popisom funkcie nástroja a možnosťou jeho využitia. Po kliknutí na nástroj sa príslušné tlačidlo zvýrazní tmavožltou farbou. To indikuje, ktorý nástroj sa práve používa. Každý objekt, ktorý sa po kliknutí na nástroj na ploche vytvorí, je možné po ploche ľubovoľne presúvať.

Každý nástroj má svoju špecifickú funkciu a predstavuje konkrétny krok riešenia úlohy alebo vizualizáciu problému. Nižšie sú uvedené a podrobne opísané všetky nástroje dostupné v aplikácii.

Sada nástrojov na ľavej strane plochy (obr. 4.13)

- **Pero**

Prvým pomocným nástrojom je **pero**. Po kliknutí na tlačidlo 'Pero' je možné kresliť po pracovnej ploche pomocou myši. Pod tlačidlom sú doplnujúce nastavenia ako farba pera, ktorá sa dá nastaviť pomocou kliknutia na farebný obdĺžnik, kde si používateľ môže zvoliť ľubovoľnú farbu. Ďalším nastavením je hrúbka pera, ktorú používateľ

môže zväčšovať a zmenšovať pomocou šípok. Následne môže kresliť alebo písať pomocou myši po celej pracovnej ploche. Ak používateľ klikne na ďalší nástroj, pero sa automaticky vypne. Nakreslené objekty nie je možné presúvať po ploche.

- **Text**

Ďalším pomocným nástrojom je **text**. Po kliknutí na tlačidlo sa v strede hornej časti plochy zobrazí vstupné políčko na vloženie textu, napríklad poznámky alebo nápadu na riešenie úlohy. Po vložení textu a následného stlačenia klávesy Enter sa daný text vypíše na ľavú hornú časť pracovnej plochy. Následne je ním možné manipulovať - ťahať ho a umiestniť na ľubovoľnú polohu v rámci pracovnej plochy.

- **Výmena pozícií**

Tento nástroj umožňuje vymieňanie pozícií prvkov v postupnosti. Nad tlačidlom sa nachádza vstupné políčko, kde používateľ zadá prvky, s ktorými chce pracovať, napríklad slovo alebo číselnú postupnosť. Následne sa na ploche objaví nástroj, v ktorom môže používateľ vymieňať ich pozície tak, že klikne na jeden prvok, potom na ďalší a ich pozície sa vymenia. Vymenené prvky sa na 1 sekundu zvýraznia žltou farbou, aby sme mali prehľad o ich pozícií.

- **Všetky možnosti**

Po kliknutí na tlačidlo sa zobrazí formulár na určenie podmienok, ktoré pri vymenovaní všetkých možností chceme dodržať. Prvá podmienka je, či sa prvky môžu opakovať, druhá či záleží na poradí prvkov. Ďalej sa zadá, aká veľká je množina prvkov a nakoniec koľko z nich vyberáme. Po odoslaní podmienok sa na ploche nástroja vypíšu všetky možnosti, no ak ich je veľmi veľa, v nástroji sa zobrazí scrollbar a je možné prechádzať všetky možnosti.

- **Výber pozícií**

Tento nástroj umožňuje ukladanie prvkov na rôzne pozície v postupnosti. Nad tlačidlom sa nachádza vstupné políčko, kde používateľ zadá počet pozícií, na ktoré chce ukladať potrebné prvky. Následne sa po kliknutí na tlačidlo objaví na ploche nástroj, v ktorom môže používateľ ukladať pomocou vstupných políčok ľubovoľné prvky. Týmto môže skúmať možnosti ukladania a počet možných správnych uložení podľa zadania úlohy.

- **Formulár na vloženie výsledku**

Zvoľ kritériá na vymenovanie všetkých možností

Opakovanie prvkov áno
 nie

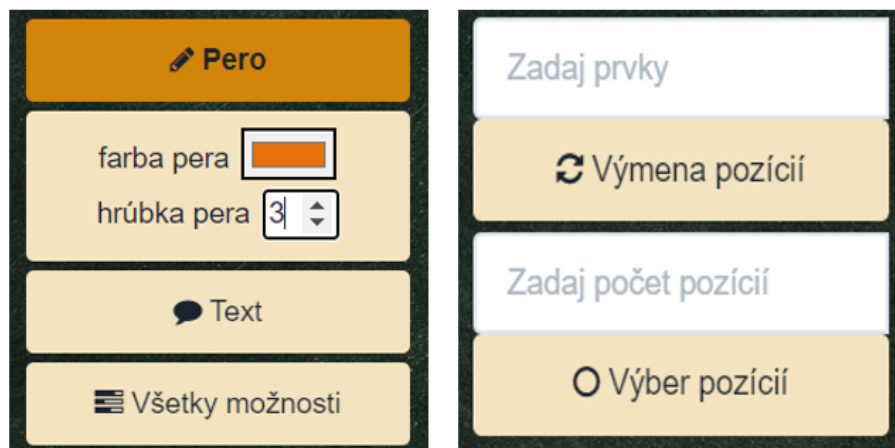
Záleží na poradí prvkov áno
 nie

Koľko prvkové skupiny potrebuješ?

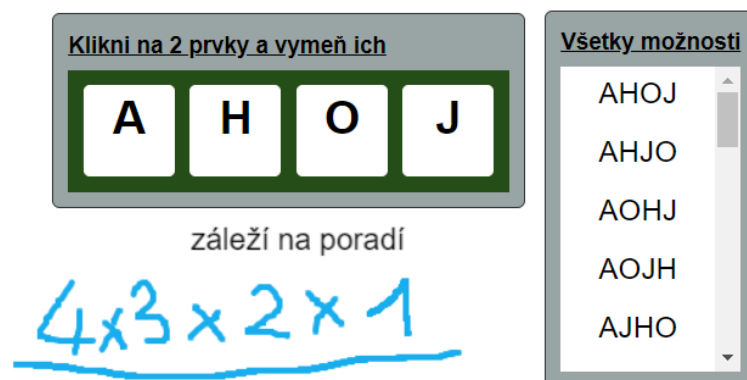
Tu vpiš prvky, ktoré chceš použiť - napíš bez medzier!

Vytvor

Obr. 4.12: Formulár na zvolenie kritérií tvorenia všetkých možností

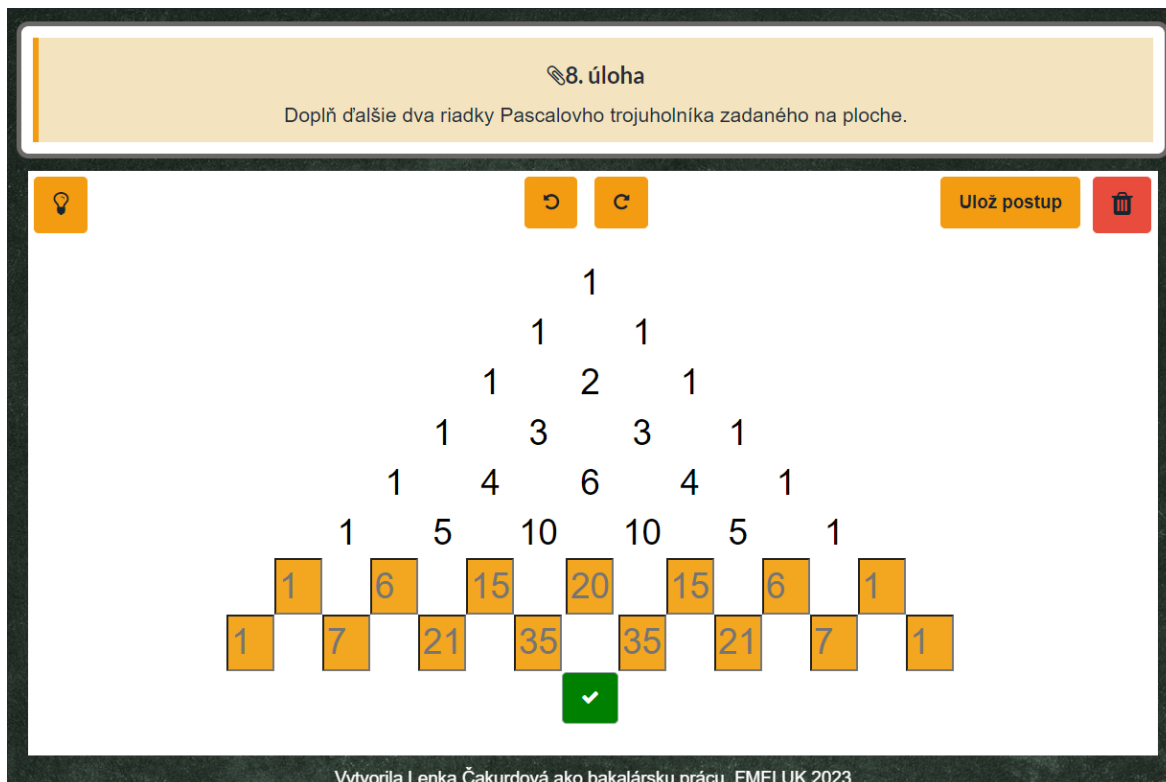


Obr. 4.13: Nástroje na riešenie úloh



Obr. 4.14: Príklad využitia nástrojov

Na pravej strane plochy sa nachádza výsledkový formulár, kde bude môcť používateľ postupne počas riešenia úlohy vkladať výrazy, a čísla, ktoré po vyriešení môže odoslať na kontrolu správnosti. Formulár obsahuje políčko na faktoriál, zlomok, kombinačné číslo, obyčajnú číselnú hodnotu a tiež operátory krát, plus a mínus. Po odoslaní a kontrole výsledku sa používateľovi zobrazí informácia, či úlohu vyriešil správne. Ak áno, postup sa automaticky uloží do databázy.



Obr. 4.15: Úloha zameraná na Pascalov trojuholník

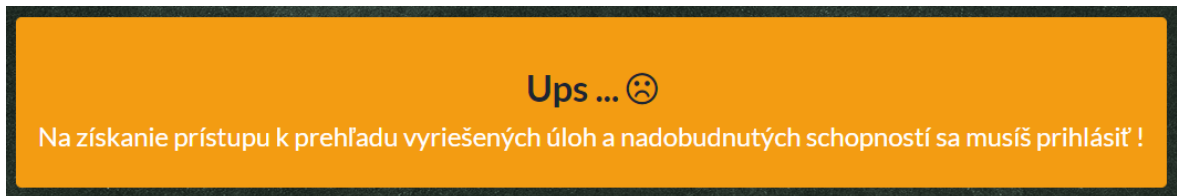
Na obrázku 4.15 je príklad zobrazenia vyriešenej úlohy u prihláseného používateľa, ktorá bola vyriešená pomocou vstupných políčok pod obrázkom Pascalovho trojuholníka. Ak používateľ zadá všetky číselné hodnoty do políčok správne, tlačidlo sa zvýrazní zelenou farbou a v políčkach sa zobrazia správne hodnoty. Ak by používateľ zadal hodnoty nesprávne, tlačidlo sa označí červenou farbou

4.2.4 Prehľad o postupe prihláseného používateľa

Stránka Môj progres bude pre neprihláseného používateľa nedostupná. Zobrazí sa mu okno s oznámením, že pre informácie o jeho vyriešených úlohách sa musí prihlásiť.

Prihlásenému používateľovi sa na tejto stránke zobrazia dve tabuľky. Prvá tabuľka **Moje vyriešené úlohy** bude obsahovať zoznamy úloh z každej sady, spolu s označením, ktoré jednotlivé úlohy sú už vyriešené. Medzi sadami úloh v tabuľke sa bude môcť požívateľ pohybovať pomocou kliknutia na záložku s názvom sady umiestnenej

nad tabuľkou. Práve zvolená sada úloh je označená tmavožltou farbou. Druhou tabuľkou, ktorá bude zobrazená napravo od predchádzajúcej, bude tabuľka **Moje skills**. Bude obsahovať zoznam všetkých zručností, alebo teda skills, ktoré môže používateľ nadobudnúť počas riešenia úloh v aplikácii. Ak žiak dosiahne danú zručnosť, označí sa v tabuľke ikonou trofeje a políčko sa zvýrazní. Údaje v tabuľkách sú automaticky aktualizované.



Obr. 4.16: Oznam pre neprihláseného používateľa na stránke Môj progres

Moje vyriešené úlohy 😊		
1. sada úloh	2. sada úloh	3. sada úloh
1. úloha - karty		x
2. úloha - stretnutie priateľov		x
3. úloha - cestovné lístky		x
4. úloha - tipovanie		✓
5. úloha - čísla		x
6. úloha - kúpeľňa		x
7. úloha - kombinačné čísla		✓
8. úloha - Pascalov trojuholník		✓

Moje skills ★	
Názov	Dosiahnuté
Faktoriál	x
Permutácie	x
Variácie	x
Kombinácie	🏆
Počítanie s kombinačnými číslami	🏆
Pascalov trojuholník	🏆
Permutácie s opakovaním	x
Kombinácie s opakovaním	x
Variácie s opakovaním	x
Princíp inklúzie a exklúzie	x

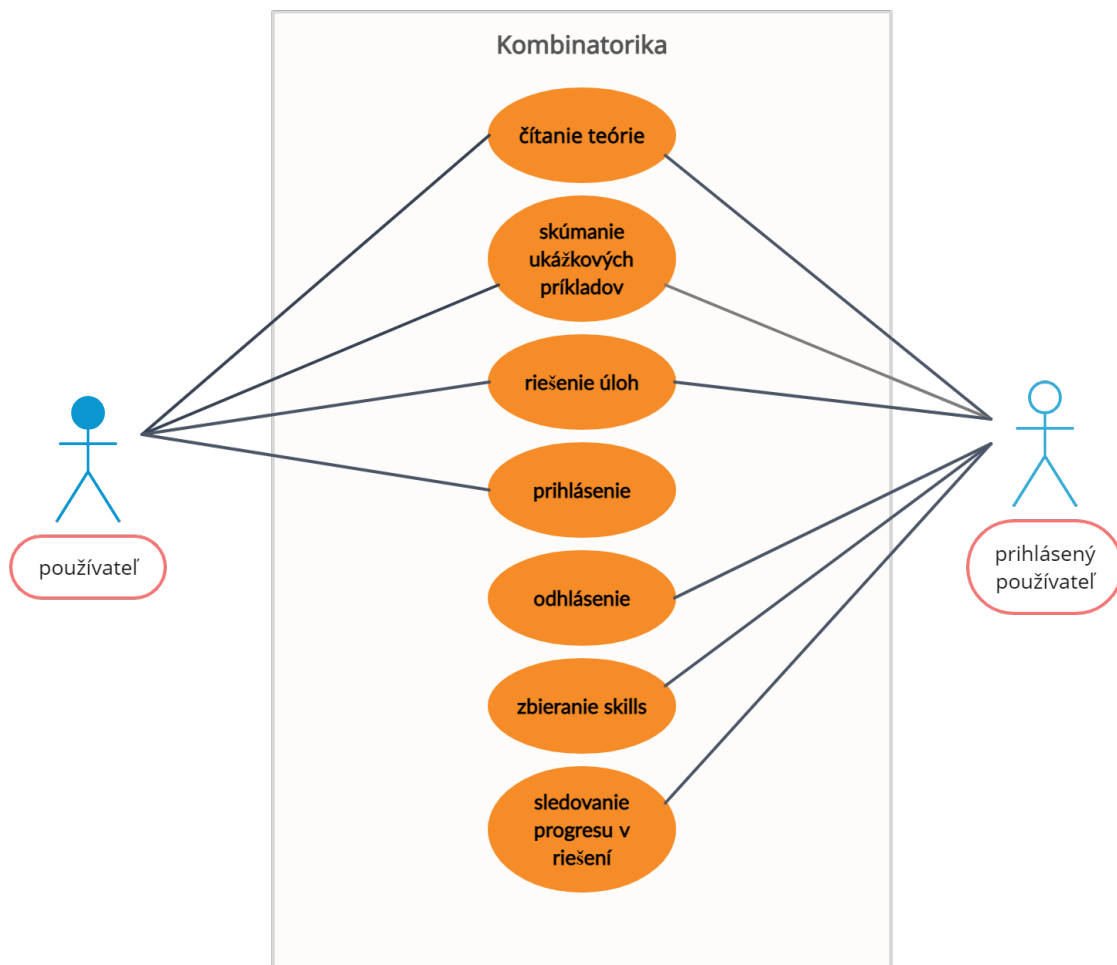
Vytvorila Lenka Čakurdová ako bakalársku prácu, FMFI UK 2023

Obr. 4.17: Tabuľky na stránke Môj progres

4.3 Prihlasovanie do aplikácie

Používateľ má možnosť sa do aplikácie prihlásiť pomocou svojho Google účtu po kliknutí na tlačidlo 'Prihlásiť sa s Google', ktoré je umiestnené na každej stránke aplikácie v pravej časti navigácie. Po kliknutí sa zobrazí popup stránka pre zvolenie Google účtu a prihlásenie. Po prihlásení sa tlačidlo zmení na 'Odhlásiť sa' a vedľa neho sa zobrazí meno práve prihláseného žiaka.

Na obrázku 4.18 je znázornený use-case diagram, v ktorom vystupujú dva typy používateľov aplikácie Kombinatorika. Neprihlásený používateľ môže využívať všetky funkcionality aplikácie okrem sledovania vlastného progresu pri študovaní a riešení úloh.

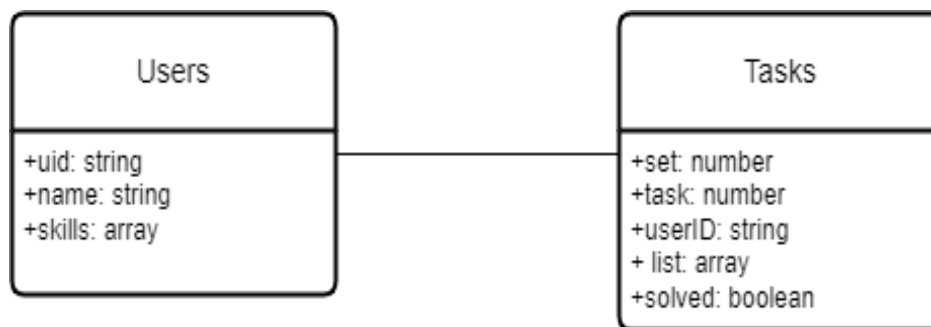


Obr. 4.18: Use-case diagram

Prihlásený používateľ okrem bežného prezerania teórie a riešenia úloh môže zbierať skills a má prehľad o vyriešených a nevyriešených úlohách.

4.4 Dátový model

Na ukladanie informácií o používateľoch, ich rozpracovaných alebo vyriešených úlohách a skills využívam Firebase databázu Cloud Firestore. Databázu aplikácie Kombinatorika tvoria dve tabuľky - collections *users* a *tasks*. Po prihlásení nového používateľa sa jeho informácie uložia do tabuľky *users*. Prihlásenému používateľovi sa z databázy načítajú rozpracované a vyriešené úlohy a tiež nadobudnuté skills. Ak používateľ rieši úlohu a stránku opustí, údaje o rozpracovanej úlohe sa uložia do databázy. Po vyriešení úlohy alebo získaní novej zručnosti sa informácie rovnako uložia do databázy a aktualizujú v aplikácii. K údajom pristupujem využívaním funkcií knižníc Firebase priamo z front-endu aplikácie pomocou JavaScriptu.



Obr. 4.19: Dátový model

4.4.1 Collection *Users*

Kolekcia *Users* obsahuje informácie o každom používateľovi aplikácie, ktorý sa prihlásil pomocou účtu Google. Parameter *uid* uchováva jeho unikátne id. Druhý parameter *name* obsahuje meno používateľa získané z jeho Google profilu, ktoré sa po prihlásení zobrazí v navigácii aplikácie. Posledný parameter *skills* je typu array. Tento zoznam uchováva všetky získané skills počas riešenia úloh v aplikácii. Pri ukladaní informácií o novom prihlásenom používateľovi, ktorý zatiaľ ešte nevyriešil žiadnu úlohu, sa tento zoznam uloží prázdny. Po získaní nejakej zručnosti sa aktualizuje. Informácie o získaných skills sú následne zobrazené na stránke Môj progres.

4.4.2 Collection *Tasks*

Kolekcia *Tasks* uchováva informácie o rozpracovaných a vyriešených úlohách používateľa. Obsahuje parametre *set* a *task*, ktoré identifikujú sadu a číslo konkrétnej úlohy. Ďalej parameter *list* obsahuje všetky elementy, ktoré boli použité pri riešení danej úlohy a informácie o nich. Parameter *solved* označuje, či je uložená úloha vyriešená alebo nie. Po otvorení už vyriešenej alebo rozpracovanej úlohy sa prihlásenému používateľovi zobrazí na ploche v aplikácii jeho postup. Parameter *userID* je unikátne id používateľa, ktorý túto úlohu riešil. Ak sa toto id zhoduje s unikátnym id práve prihláseného používateľa a konkrétna úloha je správne vyriešená, informácie sa mu zobrazia v aplikácii.

4.5 Ukážka riešenia úlohy v aplikácii

Po zvolení konkrétnej sady a úlohy sa používateľovi zobrazí pracovná plocha a zadanie úlohy. Po preštudovaní zadania môže začať skúmať možnosti riešenia úlohy.

1. úloha

Koľkými spôsobmi vieme rozmiešať balíček 32 rôznych kariet?

Obr. 4.20: Zadanie úlohy

Na ploche sa zobrazil pomocný nástroj, ktorý umožňuje používateľovi vizualizovať problém na menšej množine prvkov. V tomto prípade je to nástroj, v ktorom je možné presúvať prvky a meniť ich poradie. Ak používateľ klikne na dva zo zobrazených prvkov, zvýraznia sa žltou farbou a vymenia sa.



Obr. 4.21: Pomocný nástroj

Následne môže využiť ďalšie nástroje na skúmanie poradia prvkov. Ak si nie je istý postupom riešenia, môže kliknúť na tlačidlo s obrázkom žiarovky a pozrieť sa pomôcku. Ďalej môže využiť napríklad nástroj na vypísanie všetkých možností na základe určenia podmienok. Po kliknutí na tlačidlo 'Všetky možnosti', sa na ploche zobrazí formulár, kde používateľ zvolí podmienky, ktoré musí požadované usporiadanie prvkov spĺňať.

Keďže používateľ vytvára usporiadania kariet, pričom v balíčku sa nachádzajú rozdielne karty, zvolí možnosť 'nie' pre opakovanie prvkov. Ak vymení v nástroji 2 karty, zistí, že ide o iné usporiadanie a preto označí 'áno' pri podmienke, či záleží na poradí prvkov. Ďalej určí veľkosť skupín, ktorých usporiadanie chce vygenerovať. Je lepšie určiť menší počet prvkov, keďže na menšej množine používateľ jednoduchšie preskúma vygenerované možnosti. Posledná možnosť vo formulári je množina prvkov, z ktorých chce usporiadania vygenerovať. Keďže v zadaní je uvedené, že hľadáme všetky rôzne spôsoby rozmiešania 32 kariet, logicky vytvárame 32-prvkové usporiadania. Preto zvolí

Opakovanie prvkov áno
 nie

Záleží na poradí prvkov áno
 nie

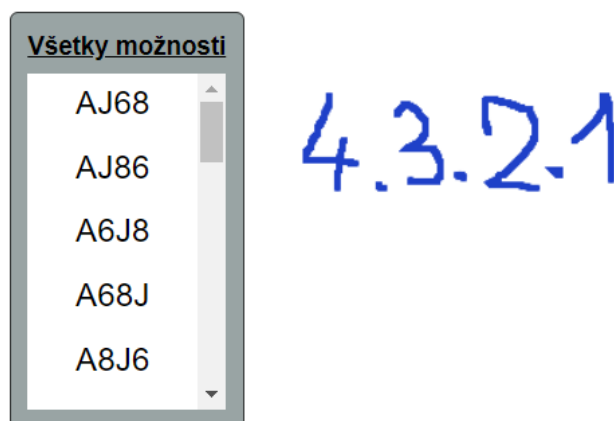
Koľko prvkové skupiny potrebuješ?

Tu vpiš prvky, ktoré chceš použiť - napíš bez medzier !

Vytvor

Obr. 4.22: Formulár na určenie podmienok vymenovania všetkých možností

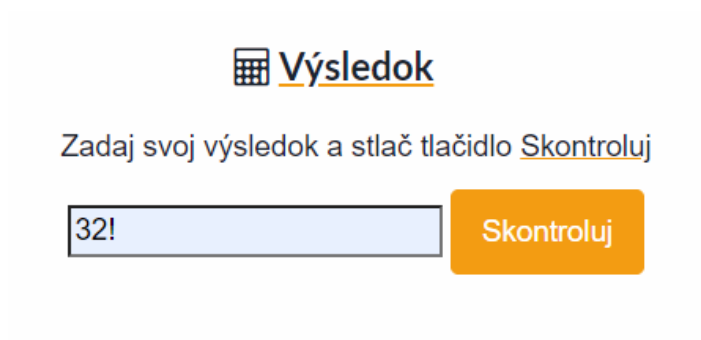
množinu prvkov s počtom prvkov zhodným s počtom vyberaných prvkov. Po kliknutí na tlačidlo 'Vytvor' sa formulár zatvorí a na ploche sa zobrazí nástroj obsahujúci všetky vygenerované možnosti. Môže medzi nimi scrollovať a prezeráť si ich. Tiež môže využiť pomocný nástroj pero, ktorým si môže na plochu napísať poznámky, ako napríklad počet možností na každú pozíciu v 4-prvkovom usporiadaní bez opakovania, ako je zobrazené na obrázku 4.23.



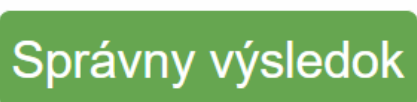
Obr. 4.23: Nástroj s vygenerovanými možnosťami

Ak by sa chcel používateľ vrátiť späť a prezrieť si teóriu, či nájsť vzorec, svoj doterajší

postup si môže uložiť a následne sa k nemu vrátiť. Ak už zistil výsledok príkladu, môže ho zadať do formulára na kontrolu. Po odoslaní sa výsledok skontroluje a zobrazí sa oznámenie, či je správny alebo nesprávny.



Obr. 4.24: Kontrola výsledku



Obr. 4.25: Označenie správneho výsledku

Ak je používateľ prihlásený do aplikácie a konkrétna úloha, ktorú rieši umožnila získanie nejakej novej zručnosti, po odoslaní správneho výsledku sa mu zobrazí oznam o získaní novej skill. Informácia o vyriešenej úlohe a zručnosti sa uložia a následne budú zobrazené v tabuľkách na stránke Môj progres.



Obr. 4.26: Oznámenie o získaní novej zručnosti

5. Implementácia

V tejto kapitole uvádzam niektoré problémy a otázky, ktoré som musela počas implementácie aplikácie vyriešiť.

5.0.1 Prihlasovanie používateľov cez Google účet

Prihlasovanie používateľov je implementované pomocou služby **Firebase Authentication**, ktorá poskytuje backendové služby na overovanie údajov používateľov a podporuje autentifikáciu pomocou emailu a hesla ale tiež rôznych iných poskytovateľov. Pre aplikáciu Kombinatorika som vybrala prihlasovanie pomocou účtu Google, pretože je priamočiare a nevyžaduje stále opätovné prihlasovanie, ak je používateľ stále prihlásený do Google konta na svojom zariadení. S backendom firebase komunikujem priamo z front-endu.

Po kliknutí na tlačidlo 'Prihlásiť sa s Google' sa spustí funkcia *signInWithPopup*, ktorá umožňuje prihlásenie go Google účtu pomocou popup stránky, ktorá po prihlásení zmizne. Táto funkcia má parameter *provider*, ktorý definuje konkrétneho poskytovateľa služby, v aplikácii kombinatorika je to poskytovateľ Google, potrebný údaj je získaný pomocou funkcie *GoogleAuthProvider()*. Funkcia *signInWithPopup* v callbacku vráti výsledok požiadavky a následne môžeme nastaviť informácie práve prihláseného používateľa. Ak sa tento používateľ prihlásil do aplikácie prvýkrát, jeho informácie sa uložia do príslušnej tabuľky *Users* vo Firestore databáze.

Stav statusu prihlásenia kontroluje funkcia *onAuthStateChanged*, ktorá sleduje hodnotu premennej *user*. Ak používateľ neexistuje, zavolá sa funkcia na nastavenie rozhrania pre neprihláseného používateľa. Na odhlásenie z aplikácie slúži tlačidlo 'Odhlásiť sa'. Po kliknutí na tlačidlo sa zavolá funkcia *signOut*, ktorá používateľa odhlási z aplikácie. Nižšie uvádzam ukážku kódu využitia funkcií knižnice **firebase-auth**

Ukážka využitia funkcií knižnice **firebase-auth** v súbore *auth.js*

```
const provider = new firebaseAuth.GoogleAuthProvider();
```

```

// login
loginButton.addEventListener('click', (e) => {
  firebaseAuth.signInWithPopup(auth, provider)
    .then(async (result) => {
      const user = result.user;
      const users = firestore.collection(db, 'users');
      const q = firestore.query(users,
        firestore.where("__name__", "==", user.uid));
      const querySnapshot = await firestore.getDocs(q);

      //new user is added to database to collection 'users'
      if (querySnapshot.empty) {
        user.providerData.forEach((profile) => {
          firestore.setDoc(firestore.doc(
            firestore.collection(db, 'users'), user.uid), {
              name: profile.displayName,
              skills: []
            });
        });
      }
    })
  });
});

```

5.0.2 Ukladanie úloh do databázy Firestore

Na ukladanie rozpracovaných a vyriešených úloh prihlásených používateľov využívam databázu **Cloud Firestore**. Je to databáza NoSQL dokumentov, ktorá dopĺňa službu autentifikácie a poskytuje prehľadné štruktúry na ukladanie dát. Na uchovanie dát o úlohách je určená tabuľka - vo Firebase *collection Tasks*. Obsahuje unikátne id používateľa, ktorý danú úlohu riešil, číslo sady a číslo úlohy, informáciu či je vyriešená a následne list - zoznam elementov a nástrojov, ktoré použil pri riešení.

Zoznam elementov a nástrojov musí byť uchovaný vo formáte vhodnom pre Firestore databázu. Formát musí byť jednoduchý na uloženie a rovnako na spätné načítanie a konvertovanie na objekty. Prvotný návrh bol využiť vnorené alebo custom objekty dostupné v databáze, no návrh nebol úspešný, pretože každý objekt má rozdielny počet rôznych parametrov, a na implementáciu funkcie, ktoré sú veľmi často volané to bolo príliš komplikované. Preto som sa rozhodla všetky nástroje a elementy spoločne uložiť do triedy *Element*, ktorej objekty majú parametre znakový reťazec *type* a objekt *args*,

ktorý obsahuje špecifické parametre nevyhnutné pre načítanie konkrétneho typu.

Pri riešení úlohy sú objekty triedy `Element` uchovávané v zozname `steps` a pred uložením do databázy sú konvertované na znakovú reprezentáciu JSON-u pomocou funkcie `JSON.stringify()`, tak vznikne jednoduchá prehľadná štruktúra zoznamu znakových reťazcov, ktorá sa uloží do databázy.

Pri načítavaní informácií o úlohách z databázy je potrebné uložený zoznam reťazcov spätne konvertovať na zoznam objektov triedy `Element`, aby sa dali načítať na plochu prihláseného používateľa. Tu využívam metódu `JSON.parse()`, ktorá jednotlivé reťazce parsuje na potrebnú reprezentáciu argumentov a následne je možné spätne vytvoriť objekty reprezentácie nástrojov a elementov.

Nižšie uvádzam ukážku zdrojového kódu funkcii na ukladanie a načítavanie z databázy.

Ukážka načítania údajov z databázy v súbore `taskLoading.js`

```
class Element{ //storing ang managing elements and tools
  constructor(type, args) {
    this.type = type;
    this.args = args;
  }
  draw(){
    ... //custom draw functions for every type
  }
}

//converts data from database to array of steps
function convert(array){
  let result = [];
  array.forEach((e) =>{
    let object = JSON.parse(e);
    let type = object.type;
    delete object.type;
    let element = new Element(type, object);
    result.push(element);
  })
  return result;
}

//load task from database and displays steps taken during solving
async function loadTask(){
```

```
if (currentUser) {
  const tasksRef = firestore.collection(db, "tasks");
  const q = firestore.query(tasksRef,
    firestore.where("userID", "==", currentUser.uid),
    firestore.where("set", "==", currentSet),
    firestore.where("task", "==", currentTask));

  const querySnapshot = await firestore.getDocs(q);
  if(querySnapshot.empty){ return }
  querySnapshot.forEach((doc) => {
    let array = doc.get("list");
    let converted = convert(array);

    converted.forEach((con) => {
      steps.push(con);
      storedSteps.push(con);
    })
    setCurrentStep();
    steps.forEach(step =>{
      step.draw();
    })
  });
  setSaved(true);
}
}
```

6. Testovanie aplikácie

Testovanie aplikácie Kombinatorika prebehlo na žiakoch strednej školy. Žiaci aplikáciu testovali individuálne po obdržaní odkazu na webovú stránku aplikácie a Google dotazníka na poskytnutie feedbacku. Cieľovou skupinou boli najmä maturanti so seminárom z matematiky a žiaci so záujmom o riešenie kombinatorických úloh.

Žiaci mali možnosť vyskúšať si všetky funkcie aplikácie, spolu s prihlásením, prezeraním teórie a riešením úloh. V Google dotazníku mali následne ohodnotiť rôzne aspekty aplikácie a tiež poskytnúť subjektívne slovné hodnotenie celkového dojmu, či navrhnúť zmeny a spomenúť nedostatky.

Dotazník obsahoval desať otázok, z toho deväť na zvolenie možnosti na stupnici hodnotenia a jednu otázku na slovnú odpoveď. Nižšie uvádzam vyhodnotenie dotazníka a tiež niektoré slovné odpovede.

Vyhodnotenie otázok so zvolením možnosti

Skóre pri hodnotení nasledujúcich otázok (okrem 2. a 8. s odpoveďou áno/nie), bolo možné zvoliť z rozsahu od **1** do **5**, pričom **1** je najhoršie a **5** najlepšie hodnotenie.

1. Ako hodnotíš používateľské rozhranie aplikácie?

priemer odpovedí: 4

2. Stretol si sa s nejakým problémom pri ovládaní aplikácie?

- áno: priemer odpovedí: 3

- nie: priemer odpovedí: 2

3. Ako hodnotíš intuitívnosť používania aplikácie?

priemer odpovedí: 4

4. Ako hodnotíš zrozumiteľnosť teórie?

priemer odpovedí: 4

5. Ako sa Ti pozdával rozsah teórie?

priemer odpovedí: 4

6. Ako hodnotíš náročnosť používania nástrojov?

priemer odpovedí: 3

7. Ako hodnotíš náročnosť úloh?

priemer odpovedí: 3

8. Mal si problém s prihlásením do aplikácie?

- áno: priemer odpovedí: 5
- nie: priemer odpovedí: 0

9. Ako hodnotíš možnosť sledovania pokroku?

priemer odpovedí: 4

Slovné hodnotenie aplikácie

Odpoveďou na poslednú 10. otázku dotazníka bolo subjektívne slovné hodnotenie aplikácie. Nižšie uvádzam slovné odpovede niektorých žiakov :

10. Aký je tvoj celkový dojem z aplikácie a čo by si zmenil?

- *Aplikácia je prehľadná, páči sa mi jej celkový dizajn*
- *Aplikácia je ľahko ovládateľná a intuitívna. Úlohy sa s pomocou teórie dali jednoducho vyriešiť. Jediná vec, ktorá mi chýbala bola guma pre čiastočné mazanie, ale funkcia undo bola dostačujúca.*
- *Prihlásenie do aplikácie bolo bezproblémové. Pri ovládaní aplikácie som mala spočiatku nejaké nejasnosti, no dlhším používaním som už nemala problém. Obsah teórie sa mi javí ako postačujúci a zrozumiteľný. Pri prejdení teórie sa úlohy dali v poriadku vyrátať. V úvode teórie, by sa zišli prekliky na konkrétne vymenované skupiny kombinatoriky. Šípky na prepínanie teórie nemusia mať fixne dané miesto, aby nebolo potrebné scrollovať naspäť hore pri dlhšej teórii. Možnosť nejakej záložky pri teórii na označenie už prejdenej teórie. Chýba nejaké označenie už spravených úloh v samotnej sérii úloh.*

Záver

Cieľom bakalárskej práce bolo navrhnúť a implementovať webovú aplikáciu určenú pre žiakov strednej školy. Aplikácia je zameraná na jednu oblasť matematiky, konkrétne kombinatoriku a spracúva úlohy čerpané z publikácie zo série Škola mladých matematikov: Kombinatorika [1]. Webová aplikácia Kombinatorika poskytuje interaktívne prostredie na riešenie kombinatorických úloh bez nutnosti použitia bežných pomôcok, ako sú pero a papier. Ponúka dynamickejšiu skúsenosť riešenia príkladov pomocou interaktívnych nástrojov, ktoré umožňujú budovať riešenie úlohy krok po kroku, viacerými spôsobmi. Aplikácia je primárne určená na individuálne štúdium a precvičovanie úloh.

Prostredie na riešenie úloh v aplikácii je navrhnuté na základe princípu konštruktivismu, ktorý sa zakladá na tom, že edukačný softvér poskytuje žiakom vhodné prostredie a žiak následne sám skúma a konštruje riešenia problémov využívaním svojich vedomostí.

Aplikácia tiež ponúka Teoretickú časť, kde si používateľ môže doplniť, či zopakovať si vedomosti z teórie kombinatoriky. Teória zahŕňa definície základných kombinatorických pojmov a tiež ukázkové príklady určené na lepšie porozumenie vysvetlených pojmov. V aplikácii je tiež dostupná možnosť prihlásenia cez Google účet. Prihlásený používateľ má možnosť ukladať si svoje riešenia, má prehľad o svojich vyriešených úlohách a sledovať svoj progres, čo ho motivuje k ďalšiemu vzdelávaniu a riešeniu úloh.

Úlohy v aplikácii sú rozdelené do troch sád, každá s odlišným stupňom náročnosti. Jednotlivé úlohy je možné interaktívne riešiť pomocou dostupných nástrojov a následne overiť správny výsledok. Jednotlivé nástroje je možné ľubovoľne premiestňovať po ploche. Pre lepšiu vizualizáciu úloh sú k niektorým úlohám k dispozícii aj obrázky. Užitočným pomocným nástrojom je tiež pero a textové pole na poznámky. Vstupné políčka na vpisovanie výsledkov sú vopred pripravené na jednoduché vloženie číselných hodnôt pre lepšie a rýchlejšie overenie správnosti výsledku.

Používateľské rozhranie aplikácie má minimalistický prehľadný dizajn evokujúci školskú tabuľu, čo je presne v rozpore s myšlienkou riešenia úloh pomocou technológií online. Aplikácia dodržiava vybranú škálu farieb a vytvára príjemný a zladený

celok. Dôraz bol kladený na intuitívnosť ovládania aplikácie a používania nástrojov pri riešení úloh. Z tohto dôvodu má každý nástroj výstižný popis svojej funkcie.

Navrhnutá aplikácia splnila cieľ bakalárskej práce. Implementácia webovej aplikácie podľa návrhu bola úspešná.

Možné rozšírenia aplikácie zahŕňajú prídanie väčšieho počtu úloh do jednotlivých sád, aby mali používatelia viac možností na precvičenie vedomostí. Rovnako by sa aplikácia mohla rozšíriť o tému pravdepodobnosti, ktorá je úzko spätá s kombinatorikou. Nasledovalo by prídanie ďalších nástrojov potrebných na riešenie úloh. Pre lepšie a rýchlejšie osvojenie si využitia nástrojov a postupu riešenia by bolo vhodné aplikáciu rozšíriť o stručný tutoriál s podrobnou ukážkou riešenia úlohy a využitia jednotlivých nástrojov. Z hľadiska používateľov by bolo vhodné pridať profil pre učiteľa, ktorý by vedel sledovať progres svojej skupiny žiakov a následne vyhodnotiť, v čom sú žiaci dobrí a na čom potrebujú viac pracovať.

Literatúra

- [1] VRBA, A. (1980). Kombinatorika, edícia Škola mladých matematikov, zväzok 45, Mladá fronta, 1980.
- [2] ZNÁM, Š. (1978). : Kombinatorika a teória grafov. Vysokoškolský učebný text, UK v Bratislave
- [3] FARSKÁ, J. (2007). : Výuka kombinatoriky na strední škole s využitím webových stránok. Diplomová práca, MFF UK Praha (2007). Dostupné na internete : <https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~portal/kombinatorika/?page=uvod>
- [4] KALAŠ, I. (2006). Digitálne technológie a vízie moderného vzdelávania. In: Zborník konferencie DidInfo 2006, Banská Bystrica. Univerzita Mateja Bela, Fakulta prírodných vied, Banská Bystrica. 2006. p. 28 – 33, ISBN 80-8083-202-1
- [5] LEHOTSKÁ, D. (2008). Edukačný softvér. In: MIF 30, XVI. ročník. Prešov, 2007. s. 16. ISSN 1335-7794 dostupné na internete: <http://edi.fmph.uniba.sk/~lehotska/praca/mif30.pdf>
- [6] MORAVČÍK, M. (2010). Vývoj a využitie edukačného softvéru v predprimárnom vzdelávaní (Autoreferát dizertačnej práce). Bratislava : FMFI UK v Bratislave, 2010.
- [7] KRŇÁČ J., SUDOLSKÁ M., TRAJTEĽ Ľ., (2010). Ďalšie vzdelávanie učiteľov základných škôl a stredných škôl v predmete informatika, Učiteľova dielňa, Štátny pedagogický ústav Bratislava ISBN 978-80-8118-041-5 dostupné na internete: https://www.statpedu.sk/files/sk/o-organizacii/projekty/projekt-dvui/publikacie/ucitelova_dielna.pdf
- [8] FANČOVIČOVÁ J., GAZDÍKOVÁ V., KOTULÁKOVÁ K. (2014). Metodika tvorby elektronických vzdelávacích materiálov, Pedagogická fakulta Trnavskej univerzity ISBN 978-80-8082-823-3
- [9] MAJERÍKOVÁ, Z. (2016). Interaktívna výuková webová aplikácia na riešenie úloh o pravdepodobnosti (Bakalárska práca). Bratislava : FMFI UK v Bratislave, 2016.

- [10] ŽITŇANSKÝ, T. (2016). Interaktívna výuková webová aplikácia na riešenie úloh o matematických hrách (Bakalárska práca). Bratislava : FMFI UK v Bratislave, 2016.
- [11] ŠVARALOVÁ M. (2015). Výukový program demonštrujúci matematický princíp, (Bakalárska práca). Bratislava : FMFI UK v Bratislave, 2015.
- [12] Mathigon. (2023). Dostupné na: <https://mathigon.org> Citované: 11.3.2023
- [13] Symbolab. (2023). Dostupné na: <https://www.symbolab.com> Citované: 21.2.2023
- [14] Brilliant. (2023). Dostupné na: <https://brilliant.org> Citované: 21.2.2023
- [15] math.js | an extensive math library for JavaScript and node.js. (2023). Dostupné na: <https://mathjs.org/> Citované: 22.3.2023
- [16] Bootstrap: Flatly (2023). Dostupné na: <https://bootswatch.com/flatly/> Citované: 15.3.2023
- [17] MathJax | Beautiful math in all browsers. (2023). Dostupné na: <https://www.mathjax.org> Citované: 20.3.2023
- [18] Firebase authentication | Simple, no-cost multi-platform sign-in (2023). Dostupné na: <https://firebase.google.com/products/auth> Citované: 25.5.2023
- [19] Firebase for apps (2023). Dostupné na: <https://firebase.google.com/> Citované: 20.5.2023
- [20] SLEZIAK M., TOMANOVÁ J. (2017). 1-UMA-124 Kombinatorika (Poznámky k prednáškam) Dostupné na internete: <http://thales.doa.fmph.uniba.sk/tomanova/1uM/Kombinatorika.pdf> Citované: 25.4.2023
- [21] Microsoft for education. (2023). Dostupné na: <https://www.pdst.ie/DistanceLearning/Platforms/Microsoft#:~:text=Brief%20Description,allow%20for%20effective%20distance%20learning>. Citované: 7.5.2023

Príloha

Príloha obsahuje zdrojový kód bakalárskej vo formáte zip.

Webová aplikácia Kombinatorika je dostupná online na:

<https://kempelen.dai.fmph.uniba.sk/kombinatorika/>

Zdrojový kód je dostupný na Git-hube:

<https://github.com/LenaCak256/webCombinatorics.git>