Vzorové príklady pre 2. domácu úlohu

Ján Komara

15. októbra 2021

1. príklad

Spočítajte, koľko celočíselných riešení má rovnica

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 15, \tag{1}$$

ak $x_1 \geq 1$, $x_2 \geq 2$, $x_3 \geq 3$ a $x_4 \geq 4$.

Riešenie 1. príkladu

Rovnica (1) je ekvivalentná rovnici

$$x_1 - 1 + x_2 - 2 + x_3 - 3 + x_4 - 4 = 15 - 1 - 2 - 3 - 4 = 5, \tag{2}$$

pričom $x_1 - 1 \geq 0$, $x_2 - 2 \geq 0$, $x_3 - 3 \geq 0$ a $x_4 - 4 \geq 0$.

Počet celočíselných riešení rovnice (2) s uvedenými ohraničeniami je ten istý ako počet celočíselných riešení rovnice

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 5,$$

kde $y_i \geq 0$ pre každé $i = 1, 2, 3, 4$. Ale ten je rovný počtu kombinácií s opakovaním 5-tej triedy zo 4 druhov:

$$\binom{5+4-1}{4-1} = \binom{8}{3} = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2} = 56.$$

A to je hľadaný počet riešení rovnice (1).

2. príklad

Určite koeficient pri x^4 vo výraze $(1 - x + 2x^2)^5$.

Riešenie 2. príkladu

Podľa multinomickej vety platí

$$
\begin{aligned}
&(1-x+2x^2)^5 = \\
&\sum_{n_1+n_2+n_3=5} \binom{5}{n_1, n_2, n_3} 1^{n_1}(-x)^{n_2}(2x^2)^{n_3} = \\
&\sum_{n_1+n_2+n_3=5} \binom{5}{n_1, n_2, n_3} (-1)^{n_2} 2^{n_3} x^{n_2+2n_3}.
\end{aligned}
$$

Potrebujeme preto určiť trojice prirodzených čísel n_1, n_2, n_3 také, že

$$n_1 + n_2 + n_3 = 5 \qquad n_2 + 2n_3 = 4.$$

Podmienky spĺňajú len tieto trojice $1, 4, 0$, $2, 2, 1$ a $3, 0, 2$:

$$
\begin{aligned}
1+4+0&=5 \qquad & 4+2\times 0 &= 4\\
2+2+1&=5 \qquad & 2+2\times 1 &= 4\\
3+0+2&=5 \qquad & 0+2\times 2 &= 4.
\end{aligned}
$$

Hľadaný koeficient je teda rovný číslu

$$\binom{5}{1,4,0}(-1)^4 2^0 + \binom{5}{2,2,1}(-1)^2 2^1 + \binom{5}{3,0,2}(-1)^0 2^2 = 105.$$

3. príklad

Koľko permutácií množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ nenecháva žiadne číslo na svojom mieste?

Riešenie 3. príkladu

Nech U je množina všetkých permutácií množiny $S = \{1, 2, \ldots, n\}$. Symbolom A_i pre $1 \leq i \leq n$ označme množinu tých permutácií z U, ktoré nechajú i-tý prvok množiny S na svojom mieste. Množiny $A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}$ majú rovnako veľa prvkov pre ľubovolný výber k čísel $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n$. Platí totiž

$$|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}| = |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k| = (n-k)!.$$

Hľadaný počet je preto rovný číslu

$$\begin{aligned}\left|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_n}\right| &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k| = \\ &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)!.\end{aligned}$$