9. prednáška

Tvrdenie. Nech A a B sú podmnožiny základnej množiny U. Potom platí

$$A \subseteq B \leftrightarrow \overline{B} \subseteq \overline{A}.$$

Dôkaz. Postupnými úpravami dostaneme

$$\begin{aligned}
&A \subseteq B \Leftrightarrow \{\text{z definície podmnožiny}\}\\
&\forall x \in U(x \in A \to x \in B) \Leftrightarrow\\
&\forall x \in U(x \notin B \to x \notin A) \Leftrightarrow \{\text{z definície doplnku}\}\\
&\forall x \in U(x \in \overline{B} \to x \in \overline{A}) \Leftrightarrow \{\text{z definície podmnožiny}\}\\
&\overline{B} \subseteq \overline{A}.
\end{aligned}$$

□

Tvrdenie. Nech A a B sú množiny. Potom platí

$$A \subseteq B \leftrightarrow A \cap B = A.$$

Dôkaz. Postupnými úpravami dostaneme

$$\begin{aligned}
&A \cap B = A \Leftrightarrow \{\text{podľa axiómu extenzionality}\}\\
&\forall x(x \in A \cap B \leftrightarrow x \in A) \Leftrightarrow \{\text{z definície prieniku}\}\\
&\forall x(x \in A \wedge x \in B \leftrightarrow x \in A) \Leftrightarrow\\
&\forall x\Big((x \in A \wedge x \in B \to x \in A) \wedge (x \in A \to x \in A \wedge x \in B)\Big) \Leftrightarrow\\
&\forall x\Big((x \in A \wedge x \in B \to \mathit{pravda}) \wedge (x \in A \to \mathit{pravda} \wedge x \in B)\Big) \Leftrightarrow\\
&\forall x\Big(\mathit{pravda} \wedge (x \in A \to x \in B)\Big) \Leftrightarrow\\
&\forall x(x \in A \to x \in B) \Leftrightarrow \{\text{z definície podmnožiny}\}\\
&A \subseteq B.
\end{aligned}$$

□

Lema. Nech A, B, C sú ľubovolné množiny. Potom platí

$$C \subseteq A \cap B \leftrightarrow C \subseteq A \wedge C \subseteq B.$$

Dôkaz. Postupnými úpravami dostaneme

$$\begin{aligned}
&C \subseteq A \cap B \Leftrightarrow \{\text{z definície podmnožiny}\}\\
&\forall x(x \in C \to x \in A \cap B) \Leftrightarrow \{\text{z definície prieniku}\}\\
&\forall x(x \in C \to x \in A \wedge x \in B) \Leftrightarrow\\
&\forall x\,((x \in C \to x \in A) \wedge (x \in C \to x \in B)) \Leftrightarrow\\
&\forall x(x \in C \to x \in A) \wedge \forall x(x \in C \to x \in B) \Leftrightarrow \{\text{z definície podmnožiny}\}\\
&C \subseteq A \wedge C \subseteq B.
\end{aligned}$$

□

Tvrdenie. Nech A, B sú ľubovolné množiny. Potom platí

$$\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B).$$

Dôkaz. Zvoľme si ľubovolnú množinu C. Postupnými úpravami dostaneme

$$\begin{aligned}
&C \in \mathcal{P}(A \cap B) \Leftrightarrow \{\text{z definície potenčnej množiny}\}\\
&C \subseteq A \cap B \Leftrightarrow \{\text{predchadzajúca lema}\}\\
&C \subseteq A \wedge C \subseteq B \Leftrightarrow \{\text{z definície potenčnej množiny}\}\\
&C \in \mathcal{P}(A) \wedge C \in \mathcal{P}(B) \Leftrightarrow \{\text{z definície prieniku}\}\\
&C \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B).
\end{aligned}$$

Dokázali sme, že platí

$$\forall C \Big(C \in \mathcal{P}(A \cap B) \leftrightarrow C \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \Big).$$

Požadované tvrdenie plynie potom z axiómu extenzionality. $\square$