7. prednáška

Matematická indukcia. Pre každú formulu $\varphi[x]$, princíp matematickej indukcie podľa x pre φ je nasledujúce tvrdenie:

$$\varphi[0] \wedge \forall x(\varphi[x] \rightarrow \varphi[x+1]) \rightarrow \forall x \varphi[x].$$

Indukčná formula φ môže obsahovať okrem indukčnej premennej x aj iné voľné premenné ako parametre. Formula $\varphi[0]$ sa nazýva báza (základný krok) indukcie. Formula $\forall x(\varphi[x] \rightarrow \varphi[x+1])$ nazýva indukčný krok. Formula $\varphi[x]$ v indukčnom kroku sa nazýva indukčný predpoklad a formula $\varphi[x+1]$ zas záver indukčného kroku.

Pascalova formula. V dôkaze nasledujúcoho tvrdenia využijeme túto vlastnosť kombinačných čísel pre $1 \leq k \leq n+1$:

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}. \tag{1}$$

Užitočná lema. Pre ľubovolné prirodzené číslo n platí identita

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} = 2 \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}. \tag{2}$$

Dôkaz. Postupnými úpravami dostaneme

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} = \binom{n+1}{0} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} + \binom{n+1}{n+1} \stackrel{(1)}{=}$$
$$1 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} + 1 = 1 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} + 1 =$$
$$\binom{n}{0} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} + \binom{n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2 \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}. \qquad \square$$

Počet podmnožín. Pre ľubovolné prirodzené číslo n platí vzťah

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

Dôkaz. Tvrdenie dokážeme matematickou indukciou podľa n.

Báza indukcie. Tvrdenie pre $n = 0$ platí, pretože:

$$\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} = \binom{0}{0} = 1 = 2^0.$$

Indukčný krok. Predpokladajme teraz, že tvrdenie platí pre n:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n. \tag{IP}$$

To je indukčný predpoklad. Ukážeme, že platí aj pre $n+1$:

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} = 2^{n+1}.$$

Skutočne, postupnými úpravami totiž dostaneme

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \overset{(2)}{=} 2 \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \overset{\text{IP}}{=} 2 \times 2^n = 2^{n+1}. \qquad \square$$

Silný princíp matematickej indukcie. Pre každú formulu $\varphi[x]$, silný princíp matematickej indukcie podľa x pre φ a $k \geq 0$ je nasledujúce tvrdenie:

$$\varphi[0] \wedge \cdots \wedge \varphi[k] \wedge \forall x \left(\varphi[x] \wedge \cdots \wedge \varphi[x+k] \rightarrow \varphi[x+k+1]\right) \rightarrow \forall x \varphi[x].$$

Indukčná formula φ môže obsahovať okrem indukčnej premennej x aj iné voľné premenné ako parametre. Všimnime si, že báza indukcie pozostáva s $k+1$ členov $\varphi[0], \ldots, \varphi[k]$. Všimnime si tiež, že indukčný krok má $k+1$ indukčných predpokladov $\varphi[x], \ldots, \varphi[x+k]$.

Pokrytie šachovnice dominovými kameňmi. Nech a_n pre $n \geq 0$ označuje počet pokrytí šachovnice rozmerov $2 \times n$ dominovými kameňmi rozmerov 2×1, 1×2 a 2×2. Dokážeme, že platí:

$$a_n = \frac{2^{n+1} + (-1)^n}{3}.$$

Dôkaz. Ľahko sa presvedčime, že platí

$$\begin{aligned} a_0 &= 1 \\ a_1 &= 1 \\ a_{n+2} &= a_{n+1} + 2a_n. \end{aligned}$$

Tvrdenie dokážeme pomocou silného princípu matematickej indukcie.

Báza indukcie. Pre $n = 0$ tvrdenie platí, pretože

$$a_0 = 1 = \frac{3}{3} = \frac{2+1}{3} = \frac{2^{0+1} + (-1)^0}{3}.$$

Pre $n = 1$ tvrdenie platí tiež, pretože

$$a_1 = 1 = \frac{3}{3} = \frac{4-1}{3} = \frac{2^2 + (-1)}{3} = \frac{2^{1+1} + (-1)^1}{3}.$$

Indukčný krok. Zvoľme si ľubovolné prirodzené číslo n. Predpokladajme, že tvrdenie platí pre n a $n+1$:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2^{n+1} + (-1)^n}{3} \\ a_{n+1} &= \frac{2^{n+1+1} + (-1)^{n+1}}{3}. \end{aligned} \qquad \text{IP}$$

To sú indukčné predpoklady. Dokážeme, že tvrdenie platí aj pre $n+2$:

$$a_{n+2} = \frac{2^{n+2+1} + (-1)^{n+2}}{3}.$$

Postupnými úpravami dostaneme

$$\begin{aligned} a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n &\overset{\text{IP}}{=} \frac{2^{n+1+1} + (-1)^{n+1}}{3} + 2\frac{2^{n+1} + (-1)^n}{3} = \\ &= \frac{2^{n+2} + (-1)^{n+1} + 2 \times 2^{n+1} + 2(-1)^n}{3} = \\ &= \frac{2^{n+2} + 2^{n+2} + (-1)^{n+1} + 2(-1)^n}{3} = \\ &= \frac{2 \times 2^{n+2} + (-1)^{n+2}\left((-1)^{-1} + 2(-1)^{-2}\right)}{3} = \\ &= \frac{2^{n+2+1} + (-1)^{n+2}(-1+2)}{3} = \frac{2^{n+2+1} + (-1)^{n+2}}{3}. \end{aligned} \qquad \square$$