Príprava na 2. semestrálny test

1 Úloha. Nech A, B, C sú výrokovo-logické premenné. Určite, ktoré z nasledujúcich tvrdení sú výrokovo-logické tautológie.

1. $(A \wedge B \to C) \leftrightarrow (A \to C) \wedge (B \to C)$.
2. $(A \vee B \to C) \leftrightarrow (A \to C) \wedge (B \to C)$.
3. $\neg(A \to B) \leftrightarrow A \wedge \neg B$.
4. $(A \to \neg A) \to A$.
5. $(\neg A \to A) \to A$.

2 Úloha. Uvažujme binárny predikát p nad oborom prirodzených čísel definovaný vzťahom:

$$\forall x \forall y \Big(p(x,y) \leftrightarrow 2y + 1 < 2x \Big).$$

Určite pravdivostnú hodnotu nasledujúcich výrokov. Vašu odpoveď zdôvodnite len pre nepravdivé tvrdenia.

1. $\forall x \exists y\, p(x,y)$.
2. $\forall x \exists y\, p(x+1,y)$.
3. $\forall y \exists x\, p(x,y)$.
4. $\exists y \exists x \Big(p(x,y) \wedge p(y,x) \Big)$.
5. $\forall x \forall y \Big(p(x,y) \to \neg p(y,x) \Big)$.

3 Úloha. Uvažujme binárny predikát p nad oborom celých čísel definovaný vzťahom:

$$\forall x \forall y \Big(p(x,y) \leftrightarrow x^2 \leq y^2 \Big).$$

Určite pravdivostnú hodnotu nasledujúcich výrokov.

1. $\forall x \exists y\, p(x,y)$.
2. $\forall y \exists x\, p(x,y)$.
3. $\exists y \forall x\, p(x,y)$.
4. $\exists x \forall y\, p(x,y)$.
5. $\forall x \forall y \Big(p(x,y) \wedge p(y,x) \to x = y \Big)$.

4 Úloha. Uvažujme predikáty p a r nad oborom celých čísel definované vzťahom:

$$\forall x\Big(p(x) \leftrightarrow x^2 = 2 - x\Big)$$
$$\forall x\Big(r(x) \leftrightarrow \neg\exists y\, x = 2y + 1\Big).$$

Určite pravdivostnú hodnotu nasledujúcich výrokov. Vašu odpoveď zdôvodnite len pre nepravdivé tvrdenia.

1. $\forall x\Big(p(x) \to x > 0\Big)$.
2. $\exists x\Big(p(x) \to x > 0\Big)$.
3. $\exists x\Big(p(x) \land r(x) \land x \le 0\Big)$.
4. $\forall x\Big(\neg r(x) \to \neg p(x)\Big)$.
5. $\exists x\Big(\neg p(x) \to x^2 < 0\Big)$.

5 Úloha. Nájdite obory pravdivosti nasledujúcich výrokových foriem

$$\{x \in R \mid 5x - 3 < |3 - 4x| < 2 - x\}$$
$$\{x \in R \mid |5x - 3| < |3 - 4x|\}$$
$$\{x \in R \mid |3 - 4x| < |2 - x|\}.$$

Dokážte, že vaše riešenie je správne.

Návod. V dôkaze využite tieto dve vlastnosti absolútnej hodnoty reálnych čísel:

$$\forall x \forall y(y < |x| \leftrightarrow y < x \lor y < -x)$$
$$\forall x \forall y(|x| < y \leftrightarrow x < y \land -x < y).$$

6 Úloha. Predikát deliteľnosti $x \mid y$ nad oborom celých čísel je definovaný vzťahom

$$\forall x \forall y(x \mid y \leftrightarrow \exists z\, y = xz).$$

Dokážte, že platí

$$\forall x(5 \mid x^2 \leftrightarrow 5 \mid x).$$

7 Úloha. Dokážte, že $\sqrt{5}$ nie je racionálne číslo.

Definícia. Nech p je binárny predikát nad neprázdnym univerzom U. Predikát je *reflexívny*, ak

$$\forall x\, p(x,x).$$

Predikát je *symetrický*, ak

$$\forall x \forall y \Big(p(x,y) \to p(y,x)\Big).$$

Predikát je *tranzitívny*, ak

$$\forall x \forall y \forall z \Big(p(x,y) \land p(y,z) \to p(x,z)\Big).$$

Ak predikát má všetky spomenuté vlastnosti, tak vravíme, že je to *ekvivalencia* na množine U.

8 Úloha. Uvažujme binárny predikát p nad oborom celých čísel definovaný vzťahom:

$$\forall x \forall y \Big(p(x,y) \leftrightarrow 2 \mid x - y\Big).$$

Dokážte, že predikát je ekvivalencia.

Sformulujte a dokážte obecnejšie tvrdenie, keď číslo 2 nahradíme iným prirodzeným číslom väčším ako 1.

9 Úloha. Uvažujme binárny predikát p nad oborom celých čísel definovaný vzťahom:

$$\forall x \forall y \Big(p(x,y) \leftrightarrow 2 \mid x + y\Big).$$

Dokážte, že predikát je ekvivalencia.

10 Úloha. Uvažujme binárny predikát p nad oborom celých čísel definovaný vzťahom:

$$\forall x \forall y \Big(p(x,y) \leftrightarrow 3 \mid x + 2y\Big).$$

Dokážte, že predikát je ekvivalencia.

Návod. Tvrdenie plynie z týchto identít: $x+2x = 3x$, $y+2x = 2(x+2y)-3y$ a $x + 2z = (x + 2y) + (y + 2z) - 3y$.

11 Úloha. Nech T_n je postupnosť trojuholníkových čísel:

$$\begin{aligned} \mathrm{T}_0 &= 0 \\ \mathrm{T}_{n+1} &= \mathrm{T}_n + n + 1. \end{aligned}$$

Dokážte, že pre každé prirodzené číslo n platí

$$\begin{aligned} 2\mathrm{T}_n &= n(n+1) \\ \mathrm{T}_n + \mathrm{T}_{n+1} &= (n+1)^2 \\ 8\mathrm{T}_n + 1 &= (2n+1)^2. \end{aligned}$$

Tvrdenia dokážte priamo pomocou matematickej indukcie.

12 Úloha. Dokážte, že pre každé prirodzené číslo n platí

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n} q^i &= \frac{q^{n+1}-1}{q-1} \quad \text{ak } q \neq 1 \\ \sum_{i=0}^{n} i2^i &= (n-1)2^{n+1} + 2. \end{aligned}$$

13 Úloha. Dokážte, že pre každé prirodzené číslo n platí

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n} i^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ \sum_{i=0}^{n} (-1)^i i^2 &= \frac{(-1)^n n(n+1)}{2}. \end{aligned}$$

14 Úloha. Dokážte, že pre každé prirodzené číslo n platí

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}.$$

V dôkaze využite nasledujúcu kombinatorickú identitu:

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}.$$

15 Úloha. Dokážte, že pre každé prirodzené číslo $n \geq 5$ platí

$$n^2 < 2^n.$$

16 Úloha. Nech f_n je postupnosť prirodzených čísel definovaná vzťahom:

$$f_0 = 0$$
$$f_1 = 1$$
$$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n.$$

Dokážte, že pre každé prirodzené číslo n platí

$$\sum_{i=0}^{n} f_i = f_{n+2} - 1$$
$$\sum_{i=0}^{n} f_i^2 = f_n \times f_{n+1}$$
$$\sum_{i=0}^{n} i f_i = n f_{n+2} - f_{n+3} + 2.$$

Dokážte tiež, že pre každé prirodzené číslo n platí

$$f_n \leq 2^n.$$

17 Úloha. Nech a_n je postupnosť čísel definovaná vzťahom:

$$a_0 = 0$$
$$a_1 = -3$$
$$a_{n+2} = 2a_n - a_{n+1}.$$

Dokážte, že pre každé prirodzené číslo n platí

$$a_n = (-2)^n - 1.$$

18 Úloha. Nech a_n je postupnosť čísel definovaná vzťahom:

$$a_0 = 0$$
$$a_1 = 7$$
$$a_{n+2} = a_{n+1} + 12a_n.$$

Dokážte, že pre každé prirodzené číslo n platí

$$a_n = 4^n - (-3)^n.$$

19 Úloha. Nech a_n je postupnosť prirodzených čísel definovaná vzťahom:

$$\begin{aligned} a_0 &= 0 \\ a_1 &= 1 \\ a_2 &= 3 \\ a_{n+3} &= a_{n+2} + a_{n+1} + a_n. \end{aligned}$$

Dokážte, že pre každé prirodzené číslo n platí nerovnosť

$$a_n < 2^n.$$

20 Úloha. Nech a_n je postupnosť prirodzených čísel definovaná vzťahom:

$$\begin{aligned} a_0 &= 0 \\ a_1 &= 2 \\ a_{n+2} &= 2a_{n+1} + 3a_n + 4. \end{aligned}$$

Dokážte, že pre každé prirodzené číslo n platí nerovnosť

$$a_n < 3^n.$$

21 Úloha. Nech a_n je postupnosť čísel definovaná vzťahom:

$$\begin{aligned} a_0 &= 0 \\ a_1 &= 0 \\ a_2 &= 2 \\ a_{n+3} - 6a_{n+2} + 11a_{n+1} - 6a_n &= 0. \end{aligned}$$

Dokážte, že pre každé prirodzené číslo n platí

$$a_n = 3^n - 2^{n+1} + 1.$$

22 Úloha. Nech a_n je postupnosť čísel definovaná vzťahom:

$$\begin{aligned} a_0 &= 1/2 \\ a_1 &= 3 \\ a_{n+2} - 5a_{n+1} + 4a_n &= 3 - 2^n. \end{aligned}$$

Dokážte, že pre každé prirodzené číslo n platí

$$a_n = 4^n + 2^{n-1} - (n+1).$$

23 Úloha. Nech a_n je postupnosť čísel definovaná vzťahom:

$$\begin{aligned} a_0 &= -1 \\ a_1 &= 0 \\ 4a_{n+2} - 4a_{n+1} + a_n &= 0. \end{aligned}$$

Dokážte, že pre každé prirodzené číslo n platí

$$a_n = \frac{n-1}{2^n}.$$

24 Úloha. Nech a_n je postupnosť čísel definovaná vzťahom:

$$\begin{aligned} a_0 &= -1 \\ a_1 &= 1 \\ a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n &= 2n - 5. \end{aligned}$$

Dokážte, že pre každé prirodzené číslo n platí

$$a_n = 3^n - 2^n + n - 1.$$

25 Úloha. Nech A a B sú podmnožiny základnej množiny U. Dokážte, že platí

$$\begin{aligned} \overline{A \cup B} &= \overline{A} \cap \overline{B} \\ \overline{A \cap B} &= \overline{A} \cup \overline{B}. \end{aligned}$$

26 Úloha. Nech A, B, C sú ľubovolné množiny. Dokážte, že platí

$$\begin{aligned} A \setminus (B \cup C) &= (A \setminus B) \setminus C \\ A \setminus (B \cap C) &= (A \setminus B) \cup (A \setminus C). \end{aligned}$$

27 Úloha. Nech A, B, C sú ľubovolné množiny. Dokážte, že platí

$$\begin{aligned} C \subseteq A \vee C \subseteq B &\to C \subseteq A \cup B \\ C \subseteq A \cap B &\leftrightarrow C \subseteq A \wedge C \subseteq B. \end{aligned}$$

28 Úloha. Nech A, B sú ľubovolné množiny. Dokážte, že platí

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) &\subseteq \mathcal{P}(A \cup B) \\ \mathcal{P}(A \cap B) &= \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B). \end{aligned}$$

29 Úloha. Nech A a B sú konečné množiny.

1. Koľko je binárnych relácií R z A do B?
2. Koľko je binárnych relácií R z A do B takých, že $\mathrm{D}(R) = A$?
3. Koľko je binárnych relácií R z A do B takých, že $\mathrm{H}(R) = B$?

30 Úloha. Nech $X \subseteq A$ a $Y \subseteq B$ sú konečné množiny.

1. Koľko je binárnych relácií R z A do B takých, že $R[X] \subseteq Y$?
2. Koľko je binárnych relácií R z A do B takých, že $R[X] \supseteq Y$?
3. Koľko je binárnych relácií R z A do B takých, že $R[X] = Y$?

31 Úloha. Nech A a B sú konečné množiny.

1. Koľko je všade definovaných relácií R z A do B?
2. Koľko je všade definovaných relácií R z A do B takých, že $\mathrm{H}(R) = B$?

32 Úloha. Nech $X \subseteq A$ a $Y \subseteq B$ sú konečné množiny.

1. Koľko je všade definovaných relácií R z A do B takých, že $R[X] \subseteq Y$?
2. Koľko je všade definovaných relácií R z A do B takých, že $R[X] \supseteq Y$?
3. Koľko je všade definovaných relácií R z A do B takých, že $R[X] = Y$?

33 Úloha. Nech A a B sú konečné množiny.

1. Koľko je jednoznačných relácií R z A do B?
2. Koľko je jednoznačných relácií R z A do B takých, že $\mathrm{H}(R) = B$?

34 Úloha. Nech $X \subseteq A$ a $Y \subseteq B$ sú konečné množiny.

1. Koľko je jednoznačných relácií R z A do B takých, že $R[X] \subseteq Y$?
2. Koľko je jednoznačných relácií R z A do B takých, že $R[X] \supseteq Y$?
3. Koľko je jednoznačných relácií R z A do B takých, že $R[X] = Y$?