

Príprava na 1. semestrálny test

1 Úloha. Koľko je párnych resp. nepárnych 7-ciferných čísel, ktoré majú všetky cifry navzájom rôzne?

2 Úloha. Koľko rôznych 14-písmenkových slov možno vytvoriť z písmen slova METAMATEMATIKA? V koľkých usporiadaniach sú všetky spoluhlásky spolu? V koľkých usporiadaniach nie sú žiadne dve samohlásky vedľa seba?

3 Úloha. V senáte zasadá 100 senátorov, pričom každý z 50 štátov má v ňom práve dvoch zástupcov. Koľkými spôsobmi je možné zvoliť 4-členný výbor tak, aby v ňom neboli 2 senátori z toho istého štátu?

4 Úloha. Výbor 8 ľudí má byť zvolený z 10 žien a 12 mužov. Koľko je možností na voľbu takéhoto výboru? Koľko je možností na voľbu takéhoto výboru, ak vyžadujeme, aby vo výbore bola aspoň 1 žena?

5 Úloha. Koľkými spôsobmi môžeme rozdeliť 10 kníh do 4 poličiek? Koľkými spôsobmi to môžeme spraviť, ak vyžadujeme, aby každá polička obsahovala aspoň jednu knihu?

6 Úloha. Koľkými spôsobmi môžeme rozdeliť 20 pomarančov medzi 7 detí? Koľkými spôsobmi to môžeme spraviť, ak navyše vyžadujeme, aby každé dieťa dostalo aspoň 2 pomaranče resp. nanajvýš 5 pomarančov?

7 Úloha. Písomka z diskkrétnej matematiky má 10 príkladov a je za 150 bodov. Koľkými rôznymi spôsobmi možno rozdeliť body medzi týchto 10 príkladov tak, aby každý príklad bol najmenej za 5 bodov, počet bodov za každý príklad bol násobkom piatich a prvé tri príklady boli spolu za 45 bodov.

8 Úloha. Spočítajte, koľko celočíselných riešení má úloha

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 &< 37,\end{aligned}$$

kde $x_i \geq 0$ pre každé $i: 1 \leq i \leq 7$.

9 Úloha. Spočítajte hodnoty nasledujúcich sumačných výrazov, t.j. vyjadrite jednoduchým vzorcom bez použitia sumy.

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^{k+1} \quad \sum_{k=0}^n \frac{2^k}{k!(n-k)!}$$

10 Úloha. Určite koeficient pri x^8 vo výraze $(2 - 3x + 5x^2)^7$.

11 Úloha. Nájdite koeficient pre člen $\frac{x^2 y^3}{z^4}$ v úplnom rozvoji výrazu

$$\left(x - 2y + \frac{3}{z} - 4\right)^{10}.$$

Kolko rôznych sčítancov je v tomto úplnom rozvoji? Aký je súčet všetkých jeho koeficientov?

12 Úloha. Kolko prirodzených čísel menších ako 10^6 obsahuje každú z cifier 1, 2 a 3?

13 Úloha. Kolko 6-ciferných čísel neobsahuje dve za sebou idúce tie isté cifry?

14 Úloha. Kolko preusporiadaní 26 písmen anglickej abecedy a, b, \dots, z neobsahuje tieto reťazce znakov: *spin*, *game*, *path* a *net*?

15 Úloha. Na plese sú 4 manželské páry. Kolkými spôsobmi možno z nich vytvoriť 4 manželské páry tak, aby manželia netancovali spolu?

16 Úloha. Kolkými spôsobmi možno usadiť 4 manželské páry na lavicu tak, aby manželia nesedeli spolu?

17 Úloha. Kolkými spôsobmi možno usadiť 4 manželské páry okolo okrúhleho stola tak, aby manželia nesedeli spolu?

18 Úloha. Na kolotoči sa vozia 4 manželské páry. Kolkými spôsobmi ich možno usadiť tak, aby žiaden manžel nesedel bezprostredne za svojou manželkou?

19 Úloha. Kolkými spôsobmi možno rozdeliť n rôznofarebných guľičiek do k rôznych priehradok? Kolkými spôsobmi to môžeme spraviť, ak vyžadujeme, aby každá priehradka obsahovala aspoň jednu resp. nanaajvýš jednu guľičku?

20 Úloha. Kolkými spôsobmi môžno rozdeliť n jednofarebných guľičiek do k rôznych priehradok? Kolkými spôsobmi to môžeme spraviť, ak vyžadujeme, aby každá priehradka obsahovala aspoň jednu resp. nanajvýš jednu guľičku?

21 Úloha. Kolko (ostro) rastúcich postupností $x_1 < x_2 < \dots < x_k$ dĺžky k možno zostaviť z čísel $1, 2, \dots, n$?

22 Úloha. Kolko monotónne rastúcich postupností $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_k$ dĺžky k možno zostaviť z čísel $1, 2, \dots, n$?

23 Úloha. Kolko postupností x_1, x_2, x_3, x_4 dĺžky 4 takých, že

$$x_1 \leq x_2 < x_3 \leq x_4,$$

možno zostaviť z čísel $0, 1, 2, \dots, 10$?

24 Úloha. Kolkokrát sa vykoná príkaz `print` pri vyhodnotení nasledujúceho segmentu programu?

```
for i := 1 to n do
  for j := i to n do
    for k := j to n do
      print(i,j,k)
```