4. domáca úloha z predmetu 1-AIN-121 Diskrétna matematika (1) ZS 2023/24

Ján Komara

14. novembra 2023

Pokyny

Príklady vypracujte podrobne. Píšte tak, aby človek, ktorý bude vašu úlohu kontrolovať, mohol ľahko sledovať vaše argumenty a tiež sled vašich myšlienok (skúste sa vžiť do jeho situácie). Výsledok bez zdôvodnenia nestačí. Za výsledok bez postupu (hoci správny) nebudete môcť dostať plný počet bodov. Neodpisujte riešenia iných. Napíšte len to, čomu naozaj rozumiete a čomu veríte. Cieľom týchto úloh je totiž sa niečo naučiť a precvičiť si to. Zjavne odpísané úlohy dostanú 0 bodov. Nad príkladmi nemusíte samozrejme rozmýšľať v tom poradí, v akom sú zadané. Odovzdať ich napísané v tomto poradí ale musíte (aby sa vo vašom riešení dalo vyznať). Viditeľne označte začiatok každého príkladu. Ak riešenie niektorého príkladu neodovzdávate, napíšte aj tak jeho číslo a vynechajte trochu miesta. Používajte notáciu a terminológiu, ktorú sme zaviedli na prednáške a cvičeniach. Úlohu môžete konzultovať s vašim cvičiacim alebo navštívte akademické podporné centrum.

Odovzdať:

v MOODLE do pondelka 20. novembra.

Úlohu musíte odovzdať ako *pdf súbor*. Riešenie treba vypracovať v nejakom editore (napr. MS Word, LibreOffice, LaTeX). Oskenovaný rukopis neposielajte, ten nebudeme hodnotiť.

Úloha je za 8 bodov.

1. príklad

Nech a_n je postupnosť čísel definovaná vzťahom:

$$\begin{aligned} a_0 &= -5 \\ a_1 &= 8 \\ a_2 &= 2 \\ a_{n+3} &= 2a_{n+2} + 5a_{n+1} - 6a_n. \end{aligned}$$

Dokážte, že pre každé prirodzené číslo $n \geq 0$ platí rovnosť

$$a_n = 2 \cdot 3^n - 3(-2)^n - 4.$$

2. príklad

Nech f_n je postupnosť prirodzených čísel definovaná vzťahom:

$$\begin{aligned} f_0 &= 0 \\ f_1 &= 1 \\ f_2 &= 2 \\ f_{n+3} &= f_{n+2} + f_{n+1} + f_n + n + 1. \end{aligned}$$

Uvažujme funkciu g piatich argumentov definovanú spätnou rekurziou:

$$g(i, n, a, b, c) = \begin{cases} a & \text{ak } i > n, \\ g(i+1, n, a+b+c+i+1, a, b) & \text{ak } i \leq n. \end{cases}.$$

Dokážte, že pre každé prirodzené číslo $n \geq 0$ platí rovnosť

$$g(0, n, 2, 1, 0) = f_{n+3}. \tag{1}$$

Návod. Ukážte najprv, že funkcia g je definovaná rekurziou s mierou, t. j. nájdite mieru μ takú že platí

$$i \leq n \to \mu(i+1, n, a+b+c+i+1, a, b) < \mu(i, n, a, b, c).$$

V dôkaze identity (1) potom použite vhodné pomocné tvrdenie; to by sa malo dokazovať indukciu s mierou μ.