1.5 Rozklady množín

1.5.1 Rozklad množiny. Systém $S \subseteq \mathcal{P}(A)$ podmnožín množiny A sa nazýva rozkladom množiny A, ak sú splnené nasledujúce podmienky:

$$\bigcup S = A$$
$$\forall B{\in}S \forall C{\in}S (B = C \leftrightarrow B \cap C \neq \emptyset).$$

Všimnime si, že potom platí

$$\forall B{\in}S\; B \neq \emptyset.$$

Prvky S sa nazývajú triedy rozkladu.

Rozklad množiny A je teda taký systém neprázdnych podmnožín A, že každý prvok z A patrí práve do jednej triedy tohto rozkladu.

1.5.2 Stirlingove čísla druhého druhu. Zápis $\mathrm{S}(n, m)$ označuje počet rozkladov n-prvkovej množiny, ktorých veľkosť je m.

1.5.3 Veta. *Pre ľubovolné prirodzené čísla n a m platí:*

$$\begin{aligned} n < m &\to \mathrm{S}(n, m) = 0 \\ n \geq 1 &\to \mathrm{S}(n, 0) = 0 \\ n \geq 1 &\to \mathrm{S}(n, 1) = 1 \\ &\mathrm{S}(n, n) = 1 \\ \mathrm{S}(n+1, m+1) &= \mathrm{S}(n, m) + (m+1) \times \mathrm{S}(n, m+1). \end{aligned} \tag{1}$$

Dôkaz. (1): Rozklady (n+1)-prvkovej množiny A na $m + 1$ tried sa dajú rozdeliť do dvoch skupín:

- Existuje $\mathrm{S}(n, m)$ rozkladov, kde posledný prvok množiny A tvorí samostatnú (t.j. jednoprvkovú) triedu.
- Existuje $(m + 1)\mathrm{S}(n, m + 1)$ rozkladov, kde posledný prvok množiny A je spolu s iným prvkom tejto množiny v tej istej triede.

Z toho plynie požadovaná identita. □

1.5.4 Veta. *Pre ľubovolné prirodzené čísla n a m platí:*

$$\mathrm{S}(n, m) = \frac{1}{m!} \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} (m - k)^n.$$

Dôkaz. Číslo $m! \times S(n, m)$ je počet rozdelení n rôznofarebných guliek do m rôznych priehradiek tak, že ani jedna priehradka nezostane prázdna. Teraz stačí využiť výsledok príkladu 1.4.4. □

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & \mathrm{S}(1,1) & & & & & \\
 & & & & \mathrm{S}(2,1) & & \mathrm{S}(2,2) & & & & \\
 & & & \mathrm{S}(3,1) & & \mathrm{S}(3,2) & & \mathrm{S}(3,3) & & & \\
 & & \mathrm{S}(4,1) & & \mathrm{S}(4,2) & & \mathrm{S}(4,3) & & \mathrm{S}(4,4) & & \\
 & \mathrm{S}(5,1) & & \mathrm{S}(5,2) & & \mathrm{S}(5,3) & & \mathrm{S}(5,4) & & \mathrm{S}(5,5) & \\
\mathrm{S}(6,1) & & \mathrm{S}(6,2) & & \mathrm{S}(6,3) & & \mathrm{S}(6,4) & & \mathrm{S}(6,5) & & \mathrm{S}(6,6)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 7 & & 6 & & 1 & & \\
 & 1 & & 15 & & 25 & & 10 & & 1 & \\
1 & & 31 & & 90 & & 65 & & 15 & & 1
\end{array}
$$

Obr. 1.1 Tabuľka hodnôt funkcie $\mathrm{S}(n, m)$ pre vybrané argumenty

1.5.5 Bellove čísla. Zápis B_n označuje počet rozkladov n-prvkovej množiny:

$$\mathrm{B}_n = \sum_{m=0}^{n} \mathrm{S}(n, m).$$

Hodnoty funkcie B_n pre vybrané argumenty:

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{B}_0 = 1\\
&\mathrm{B}_1 = 0 + 1\\
&\mathrm{B}_2 = 0 + 1 + 1 = 2\\
&\mathrm{B}_3 = 0 + 1 + 3 + 1 = 5\\
&\mathrm{B}_4 = 0 + 1 + 7 + 6 + 1 = 15\\
&\mathrm{B}_5 = 0 + 1 + 15 + 25 + 10 + 1 = 52\\
&\mathrm{B}_6 = 0 + 1 + 31 + 90 + 65 + 15 + 1 = 203.
\end{aligned}
$$

1.5.6 Veta. *Pre ľubovolné prirodzené číslo n platí:*

$$\mathrm{B}_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{B}_k.$$

Dôkaz. Rozklady $\{A_1, A_2, \dots, A_m\}$ pre $(n{+}1)$-prvkovú množinu A vytvorime v dvoch etapách. Najprv zostrojíme triedu A_1 obsahujúcu posledný prvok z množiny A. Zrejme $|A_1| = k + 1$ pre nejaké k také, že $0 \le k \le n$. Teraz vytvoríme rozklad $A_2, \dots, A_m$ množiny $\overline{A_1} \subset A$. Pretože $\left|\overline{A_1}\right| = n - k$, takýchto rozkladov je B_{n-k}. Všetkých rozkladov množiny A je preto rovný číslu

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{B}_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} \mathrm{B}_k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{B}_k. \qquad \square$$

Poznámka. Rekurentný vzťah využijeme pre výpočet hodnôt funkcie B_n napríklad takto:

$$\begin{aligned}\mathrm{B}_6 &= \binom{5}{0}\mathrm{B}_0 + \binom{5}{1}\mathrm{B}_1 + \binom{5}{2}\mathrm{B}_2 + \binom{5}{3}\mathrm{B}_3 + \binom{5}{4}\mathrm{B}_4 + \binom{5}{5}\mathrm{B}_5 = \\ &= 1 \times 1 + 5 \times 1 + 10 \times 2 + 10 \times 5 + 5 \times 15 + 1 \times 52 = \\ &= 1 + 5 + 20 + 50 + 75 + 52 = 203.\end{aligned}$$

1.5.7 Príklad. Nech $m \geq 2$ je ľubovolné, ale pevne zvolené prirodzené číslo. Pre $x \in \mathbb{Z}$ označíme symbolom $[x]$ množinu tých celých čísel, ktorých zvyšok pri delení číslom m je číslo $x \bmod m$:

$$[x] = \{y \in \mathbb{Z} \mid y \bmod m = x \bmod m\}.$$

Tieto množiny nazývame zvyškovými triedami podľa modulu m (modulo m). Ľahko sa ukáže, že systém zvyškových tried modulo m:

$$\{[x] \mid x \in \mathbb{Z}\}$$

tvorí rozklad množiny $\mathbb{Z}$. Tento rozklad je konečný, pretože

$$\mathbb{Z} = \bigcup_{r=0}^{m-1} [r] = [0] \cup [1] \cup [2] \cup \cdots \cup [m-2] \cup [m-1]\,.$$

1.5.8 Príklad. Pre $(a,b) \in \mathbb{N}^2$ označme teraz symbolom $[(a,b)]$ množinu usporiadaných dvojíc prirodzených čísel definovanú vzťahom:

$$[(a,b)] = \{(c,d) \in \mathbb{N}^2 \mid a + d = c + b\}.$$

Všimnime si, že platí

$$(c,d) \in [(a,b)] \leftrightarrow c - d = a - b.$$

Ľahko sa ukáže, že systém množín

$$\{[(a,b)] \mid a \in \mathbb{N} \wedge b \in \mathbb{N}\}$$

tvorí nekonečný rozklad množiny $\mathbb{N}^2$. Tento rozklad je izomorfný množine celých čísel $\mathbb{Z}$.

1.5.9 Príklad. Pre $(a,b) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ označme opäť symbolom $[(a,b)]$ množinu usporiadaných dvojíc celých čísel definovanú vzťahom:

$$[(a,b)] = \big\{(c,d) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}) \bigm| ad = cb\big\}.$$

Všimnime si, že platí

$$(c, d) \in [(a, b)] \leftrightarrow \frac{c}{d} = \frac{a}{b}.$$

Ľahko sa ukáže, že systém množín

$$\big\{[(a, b)] \;\big|\; a \in \mathbb{Z} \wedge b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\big\}$$

tvorí nekonečný rozklad množiny $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$. Tento rozklad je izomorfný množine racionálnych čísel $\mathbb{Q}$.