1.1 Základné pojmy

1.1.1 Jazyk teórie množín. Vlastnosti množín budeme zapisovať v štandardnom logickom formalizme obohateného o binárny predikátový symbol $\in$, pre ktorý požívame infixovú notáciu $x \in A$. Ostatné pojmy, ktoré zavedieme neskôr, definujeme pomocou tohto predikátového symbolu.

Pre zlepšenie čitateľnosti formúl jazyka teórie množín budeme používať niektoré skrátené označenia. Napr.

$$\forall x{\in}A\, \varphi \equiv \forall x(x \in A \to \varphi)$$
$$\exists x{\in}A\, \varphi \equiv \exists x(x \in A \wedge \varphi).$$

S ostatnými notačnými konvenciami sa postupne zoznámime.

1.1.2 Byť prvkom množiny. Zápis $x \in A$ znamená „objekt x je prvkom množiny A“. Negáciu tvrdenia $x \in A$ zapisujeme skrátene $x \notin A$.

1.1.3 Rovnosť množín. Zápis $A = B$ znamená „množiny A a B sú rovnaké, majú tie isté prvky“:

$$A = B \leftrightarrow \forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B).$$

Vlastnosť sa nazýva *axióma extenzionality*. Negáciu tvrdenia $A = B$ zapisujeme skrátene $A \neq B$.

1.1.4 Vzťah inklúzie. Zápis $A \subseteq B$ znamená „množina A je podmnožina množiny B“:

$$A \subseteq B \leftrightarrow \forall x(x \in A \to x \in B).$$

Negáciu tvrdenia $A \subseteq B$ zapisujeme skrátene $A \nsubseteq B$.

Zápis $A \subset B$ znamená „množina A je vlastná podmnožina množiny B“:

$$A \subset B \leftrightarrow A \subseteq B \wedge A \neq B.$$

Negáciu tvrdenia $A \subset B$ zapisujeme skrátene $A \not\subset B$.

1.1.5 Poznámka. Pri dôkaze rovnosti dvoch množín je možné použiť vzťah inklúzie, pretože platí nasledujúca očividná ekvivalencia:

$$A = B \leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A.$$

Ak A a B sú podmnožiny nejakej základnej množiny U, potom

$$A = B \leftrightarrow \forall x{\in}U(x \in A \leftrightarrow x \in B)$$
$$A \subseteq B \leftrightarrow \forall x{\in}U(x \in A \to x \in B).$$

1.1.6 Príklady množín. Niektoré množiny sú všeobecne známe. Sú to napríklad tieto číselné množiny:

množina prirodzených čísel $\mathbb{N}$,
množina celých čísel $\mathbb{Z}$,
množina racionálnych čísel $\mathbb{Q}$,
množina reálnych čísel $\mathbb{R}$.

1.1.7 Určenie množiny vymenovaním prvkov. Najjednoduchší spôsob ako určiť množinu je vymenovať všetky jej prvky. Zápis

$$\{a_1, \ldots, a_n\}$$

predstavuje konečnú množinu, ktorá pozostáva s prvkov $a_1, \ldots, a_n$:

$$\forall x\big(x \in \{a_1, \ldots, a_n\} \leftrightarrow x = a_1 \vee \cdots \vee x = a_n\big).$$

Jednoznačnosť popisu množiny plynie z axiómy extenzionality.

1.1.8 Určenie množiny vydelením prvkov. Bežnejší spôsob ako zadať množinu je vyčlenením (vydelením) časti vopred danej množiny pomocou podmienky, ktorú majú spĺňať jej prvky. Nech $\varphi[x]$ je výroková forma s jedinou voľnou premennou x a s definičným oborom obsahujúcim množinu A. Zápis

$$\{x \in A \mid \varphi[x]\}$$

predstavuje množinu pozostávajúcej práve s tých prvkov x množiny A, ktoré majú vlastnosť $\varphi[x]$:

$$\forall x\big(x \in \{x \in A \mid \varphi[x]\} \leftrightarrow x \in A \wedge \varphi[x]\big).$$

Jednoznačnosť popisu množiny plynie z axiómy extenzionality.

1.1.9 Russellov paradox. Pokus o zosilnenie predchadzajúcej definičnej schémy vynechaním požiadavky, aby sa množina tvorila z vopred danej množiny, môže viesť k logickým protirečeniam. Ilustrujeme to na nasledujúcom príklade.

Pokusme sa vytvoriť množinu M, ktorej prvky x majú vlastnosť $x \notin x$:

$$\forall x(x \in M \leftrightarrow x \notin x). \tag{1}$$

Predpokladajme, že taká množina M existuje. Potom pre M dosadené v (1) za x dostaneme

$$M \in M \leftrightarrow M \notin M.$$

To je očividne nepravdivé tvrdenie. Dostali sme spor. Dôsledok: množina M s vlastnosťou (1) neexistuje.

1.1.10 Určenie množiny charakteristickou vlastnosťou. Nech $\varphi[x]$ je výroková forma s jedinou voľnou premennou x. Podľa predchadzajúceho prikladu nemáme zaručené, že existuje množina určená touto vlastnosťou, t.j. že platí

$$\exists M \forall x (x \in M \leftrightarrow \varphi[x]).$$

Ak sa presvedčíme, že taká množina existuje, budeme ju označovať zápisom

$$\{x \mid \varphi[x]\}.$$

V takom prípade platí

$$\forall x \big(x \in \{x \mid \varphi[x]\} \leftrightarrow \varphi[x] \big).$$

Jednoznačnosť popisu množiny plynie z axiómy extenzionality. Výroková forma $\varphi[x]$ sa nazýva charakteristická vlastnosť tejto množiny.

Poznámka. Určenie množiny vymenovaním resp. vydelením jej prvkov je špeciálnym prípadom určenia množiny charakteristickou vlastnosťou:

$$\begin{aligned} \{a_1, \dots, a_n\} &= \{x \mid x = a_1 \vee \dots \vee x = a_n\} \\ \{x \in A \mid \varphi[x]\} &= \{x \mid x \in A \wedge \varphi[x]\} \end{aligned}$$

1.1.11 Poznámka. Zápis

$$\{\tau[\vec{x}] \mid \varphi[\vec{x}]\}$$

predstavuje množinu pozostávajúcej s takých objektov v tvare $\tau[\vec{x}]$, kde $\vec{x}$ spĺňajú podmienku $\varphi[\vec{x}]$, t.j.

$$\{\tau[\vec{x}] \mid \varphi[\vec{x}]\} = \{y \mid \exists \vec{x} (y = \tau[\vec{x}] \wedge \varphi[\vec{x}])\}.$$

Tu predpokladáme, že výrazom na pravej strane je skutočne určená množina.

Podobne zápis

$$\{\tau[\vec{x}] \in A \mid \varphi[\vec{x}]\}$$

predstavuje množinu tých prvkov množiny A v tvare $\tau[\vec{x}]$, kde $\vec{x}$ spĺňajú podmienku $\varphi[\vec{x}]$, t.j.

$$\{\tau[\vec{x}] \in A \mid \varphi[\vec{x}]\} = \{y \in A \mid \exists \vec{x} (y = \tau[\vec{x}] \wedge \varphi[\vec{x}])\}.$$