1.4 Princíp zapojenia a vypojenia

1.4.1 Veta. *Nech $A_1, \dots, A_n$ je systém podmnožín konečného univerza U. Potom*

$$\left|\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}\right| = \sum_{I \subseteq \{1,\dots,n\}} (-1)^{|I|} \left|\bigcap_{i\in I} A_i\right| = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \sum_{\substack{I\subseteq\{1,\dots,n\}\\ |I|=k}} \left|\bigcap_{i\in I} A_i\right|. \qquad (1)$$

Dôkaz. Tvrdenie dokážeme, ak sa nám podarí ukázať, že prvok z U, ktorý sa nenachádza v žiadnej z množín A_i, prispieva k obom stranám vzťahu (1) jednou jednotkou, kým príspevok prvku nachádzajúceho sa aspoň v jednej z týchto množín je k obom stranám nulový.

Predpokladajme najprv, že prvok z U sa nenachádza v žiadnej z množín A_i. Potom tento prvok prispieva na pravej strane (1) jednotkou, pretože sa vyskytuje len v $\bigcap_{i\in\emptyset} A_i = U$, ale vo zvyšných prienikoch sa už nevyskytuje.

Uvažujme teraz prvok x, ktorý sa nachádza práve v $t \geq 1$ množinách A_i. Tento prvok prispieva k sume

$$\sum_{\substack{I\subseteq\{1,\dots,n\}\\ |I|=k}} \left|\bigcap_{i\in I} A_i\right|$$

jednotkou pre $k = 0$, t jednotkami pre $k = 1$, $\binom{t}{2}$ jednotkami pre $k = 2$, $\binom{t}{3}$ jednotkami pre $k = 3$, atď. Pre $k > t$ je táto suma rovná nule (prečo?). Zhrnutie: prvok x prispieva k pravej strane (1) práve

$$1 - t + \binom{t}{2} - \binom{t}{3} + \cdots + (-1)^t \binom{t}{t} = \sum_{k=0}^{t} (-1)^k \binom{t}{k}$$

jednotkami. Podľa binomickej vety sa toto číslo rovná nule:

$$\sum_{k=0}^{t} (-1)^k \binom{t}{k} = \sum_{k=0}^{t} \binom{t}{k} (-1)^k 1^{t-k} = (-1+1)^t = 0^t = 0. \qquad \square$$

1.4.2 Veta. *Nech $A_1, \dots, A_n$ je systém podmnožín konečného univerza U. Potom*

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1,\dots,n\}} (-1)^{|I|-1} \left|\bigcap_{i\in I} A_i\right| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{\substack{I\subseteq\{1,\dots,n\}\\ |I|=k}} \left|\bigcap_{i\in I} A_i\right|.$$

Dôkaz. Tvrdenie plynie z predošlej vety a z rovnosti

$$|U| = \left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| + \left|\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}\right|. \qquad \square$$

1.4.3 Poznámka. V prípade, že hodnota $\left|\bigcap_{i\in I} A_i\right|$ je rovnaká pre všetky výbery množiny indexov I tej istej veľkosti, potom princíp zapojenia a vypojenia sa dá vysloviť aj v takomto stručnejšom tvare:

$$\left|\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}\right| = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \left|\bigcap_{i=1}^{k} A_i\right|$$
$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} \left|\bigcap_{i=1}^{k} A_i\right|.$$

1.4.4 Príklad. Koľkými spôsobmi môžno rozdeliť n rôznofarebných guliek do m rôznych priehradiek tak, že ani jedna priehradka nezostane prázdna?

Riešenie. Nech U je množina všetkých rozdelení n rôznofarebných guliek do m rôznych priehradiek. Označme A_i pre $1 \le i \le m$ množinu tých prvkov z U, ktoré majú vlastnosť „i-tá priehradka zostane prázdna“. Potom množiny $A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}$ majú rovnako veľa prvkov pre ľubovolný výber čísel k a $1 \le i_1 < \ldots < i_k \le m$. Hľadaný počet je preto rovný číslu

$$\left|\bigcap_{i=1}^{m} \overline{A_i}\right| = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} \left|\bigcap_{i=1}^{k} A_i\right| = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} (m-k)^n. \qquad \square$$