1.6 Základné množinové identity

1.6.1 Príklad. Distributívny zákon pre operáciu prieniku množín vzhľadom k operácii zjednotenia množín:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C). \tag{1}$$

Dôkaz. Zvoľme si ľubovolný prvok x. Postupnými úpravami dostaneme

$$\begin{aligned}
&x \in A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow \{\text{z definície prieniku}\}\\
&x \in A \wedge x \in B \cup C \Leftrightarrow \{\text{z definície zjednotenia}\}\\
&x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C) \Leftrightarrow\\
&x \in A \wedge x \in B \vee x \in A \wedge x \in C \Leftrightarrow \{\text{z definície prieniku (2x)}\}\\
&x \in A \cap B \vee x \in A \cap C \Leftrightarrow \{\text{z definície zjednotenia}\}\\
&x \in (A \cap B) \cup (A \cap C).
\end{aligned}$$

Dokázali sme, že platí

$$\forall x\big(x \in A \cap (B \cup C) \leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)\big).$$

Požadované tvrdenie plynie z axiómu extenzionality. □

1.6.2 Príklad. Nech A a B sú podmnožiny nejakej základnej množiny U. Potom

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}. \tag{1}$$

Vlastnosť sa nazýva De Morganov zákon pre operáciu doplnku množín.

Dôkaz. Zvoľme si ľubovolný prvok x. Postupnými úpravami dostaneme

$$\begin{aligned}
&x \in \overline{A \cap B} \Leftrightarrow \{\text{z definície doplnku}\}\\
&x \in U \wedge x \notin A \cap B \Leftrightarrow \{\text{z definície prieniku}\}\\
&x \in U \wedge \neg(x \in A \wedge x \in B) \Leftrightarrow\\
&x \in U \wedge (x \notin A \vee x \notin B) \Leftrightarrow\\
&x \in U \wedge x \notin A \vee x \in U \wedge x \notin B \Leftrightarrow \{\text{z definície doplnku (2x)}\}\\
&x \in \overline{A} \vee x \in \overline{B} \Leftrightarrow \{\text{z definície zjednotenia}\}\\
&x \in \overline{A} \cup \overline{B}.
\end{aligned}$$

Dokázali sme, že platí

$$\forall x\big(x \in \overline{A \cap B} \leftrightarrow x \in \overline{A} \cup \overline{B}\big).$$

Požadované tvrdenie plynie z axiómu extenzionality. □

1.6.3 Príklad. Nech A, B a C sú podmnožiny nejakej základnej množiny U. Potom

$$A \setminus B = A \cap \overline{B} \tag{1}$$
$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C). \tag{2}$$

Druhá vlastnosť sa nazýva De Morganov zákon pre operáciu rozdielu množín.

Dôkaz. (1): Plynie priamo z definície. (2): Postupnými úpravami dostaneme

$$\begin{aligned} A \setminus (B \cap C) &\overset{(1)}{=} A \cap \overline{B \cap C} \overset{1.6.2(1)}{=} A \cap (\overline{B} \cup \overline{C}) \overset{1.6.1(1)}{=} \\ &= (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap \overline{C}) \overset{(1)}{=} (A \setminus B) \cup (A \setminus C). \end{aligned}$$ □

1.6.4 Príklad. Dokážte alebo vyvráťte (uvedením kontrapríkladu) nasledujúce tvrdenie:

$$A \setminus B = B \setminus A.$$

Riešenie. Tvrdenie neplatí. Tu je kontrapríklad:

$$\{1\} \setminus \emptyset = \{1\} \neq \emptyset = \emptyset \setminus \{1\}.$$ □

1.6.5 Príklad. Nech A a B sú podmnožiny nejakej základnej množiny U. Potom

$$A \subseteq B \leftrightarrow A \cap B = A \tag{1}$$
$$A \subseteq B \leftrightarrow A \cap \overline{B} = \emptyset. \tag{2}$$

Dôkaz. (1): Postupnými úpravami dostaneme

$$\begin{aligned} &A \cap B = A \Leftrightarrow \{\text{podľa axiómu extenzionality}\} \\ &\forall x\big(x \in A \cap B \leftrightarrow x \in A\big) \Leftrightarrow \{\text{z definície prieniku}\} \\ &\forall x\big(x \in A \wedge x \in B \leftrightarrow x \in A\big) \Leftrightarrow \\ &\forall x\big(x \in A \wedge x \in B \rightarrow x \in A\big) \wedge \forall x\big(x \in A \rightarrow x \in A \wedge x \in B\big) \Leftrightarrow \\ &\mathit{pravda} \wedge \forall x(x \in A \rightarrow x \in B) \Leftrightarrow \\ &\forall x(x \in A \rightarrow x \in B) \Leftrightarrow \{\text{z definície podmnožiny}\} \\ &A \subseteq B. \end{aligned}$$

(2): Všimnime si najprv, že z predpokladu $A \subseteq U$ plynie

$$\forall x(x \in A \wedge x \in U \leftrightarrow x \in A). \tag{$\dagger_1$}$$

Postupnými úpravami dostaneme

$$
\begin{aligned}
&A \cap \overline{B} = \emptyset \Leftrightarrow \{\text{podľa axiómu extenzionality}\}\\
&\forall x\big(x \in A \cap \overline{B} \leftrightarrow x \in \emptyset\big) \Leftrightarrow \{\text{z definície prázdnej množiny}\}\\
&\forall x\big(x \in A \cap \overline{B} \leftrightarrow \mathit{nepravda}\big) \Leftrightarrow\\
&\forall x\, x \notin A \cap \overline{B} \Leftrightarrow \{\text{z definície prieniku}\}\\
&\forall x \neg(x \in A \wedge x \in \overline{B}) \Leftrightarrow \{\text{z definície doplnku}\}\\
&\forall x \neg(x \in A \wedge x \in U \wedge x \notin B) \Leftrightarrow \{\text{podľa } (\dagger_1)\}\\
&\forall x \neg(x \in A \wedge x \notin B) \Leftrightarrow\\
&\forall x \neg\neg(x \in A \to x \in B) \Leftrightarrow\\
&\forall x(x \in A \to x \in B) \Leftrightarrow \{\text{z definície podmnožiny}\}\\
&A \subseteq B.
\end{aligned}
$$

□

1.6.6 Príklad. Trochu zložitejší príklad. Nech A, B a C sú podmnožiny nejakej základnej množiny U. Nech ďalej

$$A \cap B \subseteq C \to A \cap \overline{B} \neq \emptyset \tag{1}$$

$$A \subseteq B \vee A \subseteq C \tag{2}$$

$$A \cap C \subseteq B. \tag{3}$$

Potom

$$A \cap B \cap \overline{C} \neq \emptyset. \tag{4}$$

Dôkaz. Predpokladajme najprv, že $A \subseteq B$. Z 1.6.5(2) plynie $A \cap \overline{B} = \emptyset$. Odtiaľ a z (1) $A \cap B \nsubseteq C$ Opäť použijeme 1.6.5(2) a dostaneme (4).

Predpokladajme teraz, že $A \nsubseteq B$. Z 1.6.5(2) plynie

$$A \cap \overline{B} \neq \emptyset. \tag{$\dagger_1$}$$

Podľa (2) je tiež nutne, že $A \subseteq C$. Z 1.6.5(1) potom plynie

$$A \cap C = C. \tag{$\dagger_2$}$$

Postupnými úpravami teraz dostaneme

$$A \cap C \cap \overline{B} \overset{(\dagger_2)}{=} A \cap \overline{B} \overset{(\dagger_1)}{\neq} \emptyset.$$

Odtiaľ, s použitím 1.6.5(2), dostaneme, že platí $A \cap C \nsubseteq B$ To je ale v spore s predpokladom (3). Prípad $A \nsubseteq B$ nemôže teda nastať. □