1.3 Zovšeobecnené množinové operácie

Karteziánsky súčin konečného systému množín

1.3.1 Usporiadané n-tice. Zápis $(x_1, \ldots, x_n)$, kde $n \geq 2$, značí usporiadanú n-ticu objektov $x_1, \ldots, x_n$ (v tomto poradí). Prvok x_i sa nazýva i-tá projekcia (súradnica, zložka) usporiadanej n-tice.

Základnú vlastnosť usporiadaných n-tíc vyjadruje tento vzťah

$$(x_1, \ldots, x_n) = (y_1, \ldots, y_n) \leftrightarrow x_1 = y_1 \wedge \cdots \wedge x_n = y_n.$$

Usporiadané n-tice môžeme definovať pomocou usporiadaných dvojíc napríklad takýmto induktívnym predpisom

$$(x_1, \ldots, x_n) = \big((x_1, \ldots, x_{n-1}), x_n\big) \quad \text{pre } n \geq 3.$$

Alternatívna induktívna definícia

$$(x_1, \ldots, x_n) = \big(x_1, (x_2, \ldots, x_n)\big) \quad \text{pre } n \geq 3.$$

1.3.2 Karteziánsky súčin konečného počtu množín. Zápis

$$A_1 \times \cdots \times A_n$$

znamená karteziánsky súčin $n \geq 2$ množín $A_1, \ldots, A_n$:

$$A_1 \times \cdots \times A_n = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_1 \in A_1 \wedge \cdots \wedge x_n \in A_n\}.$$

Čiže

$$\forall y \Big(y \in A_1 \times \cdots \times A_n \leftrightarrow \\ \exists x_1 \ldots \exists x_n \big(y = (x_1, \ldots, x_n) \wedge x_1 \in A_1 \wedge \cdots \wedge x_n \in A_n \big) \Big).$$

Pre $A_1 = \cdots = A_n = A$ kladieme

$$\begin{aligned} A^n &= \overbrace{A \times \cdots \times A}^{n\text{-krát}} \qquad \text{pre } n \geq 2 \\ A^1 &= A \\ A^0 &= \{\emptyset\}. \end{aligned}$$

Množina A^n sa niekedy nazýva karteziánska mocnina množiny A.

Zjednotenie a prienik systému množín

1.3.3 Indexovaný systém množín. Nech $A_1, \ldots, A_n$ je (konečný) systém podmnožín základnej množiny U. Nech

$$I = \{i_1, \ldots, i_k\} \subseteq \{1, \ldots, n\}$$

je ľubovolná ale pevne daná množina indexov. Symbolom $\{A_i \mid i \in I\}$ budeme označovať systém množín vytvorených množinou indexov I:

$$\{A_i \mid i \in I\} = \{A_{i_1}, \ldots, A_{i_k}\}.$$

1.3.4 Zjednotenie indexovaného systému množín. Zápis $\bigcup_{i \in I} A_i$ znamená zjednotenie systému množín $\{A_i \mid i \in I\}$:

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \in U \mid \exists i{\in}I \, x \in A_i\}.$$

Všimnime si, že platí $\bigcup_{i \in \emptyset} A_i = \emptyset$. Pre $I = \{1, \ldots, k\}$ budeme používať toto označenie $\bigcup_{i=1}^{k} A_i$.

1.3.5 Prienik indexovaného systému množín. Zápis $\bigcap_{i \in I} A_i$ znamená prienik systému množín $\{A_i \mid i \in I\}$:

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \in U \mid \forall i{\in}I \, x \in A_i\}.$$

Všimnime si, že platí $\bigcap_{i \in \emptyset} A_i = U$. Pre $I = \{1, \ldots, k\}$ budeme používať toto označenie $\bigcap_{i=1}^{k} A_i$

1.3.6 Zjednotenie systému množín. Zápisom $\bigcup S$ označujeme zjednotenie systému množín S, ktoré je definované predpisom:

$$\bigcup S = \{x \mid \exists A{\in}S \, x \in A\}.$$

Všimnime si, že platia tieto vzťahy:

$$A \cup B = \bigcup \{A, B\}$$

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup \{A_1, \ldots, A_n\}$$

$$S \subseteq \mathcal{P}(A) \leftrightarrow \bigcup S \subseteq A.$$