Cvičenia

Základné pojmy

1.1. Nech $|A| = n$.

(i) Koľko k-prvkových podmnožín má množina A?
(ii) Koľko podmnožín má množina A?
(iii) Koľko podmnožín s párnym počtom prvkov má množina A?
(iv) Koľko podmnožín s nepárnym počtom prvkov má množina A?
(v) Koľko je usporiadadných dvojíc (B, C) takých, že $B \subseteq C \subseteq A$?

1.2. Nech $A = \{1, 2, \dots, n\}$.

(i) Koľko je k-prvkových podmnožín množiny A, v ktorých sa nevyskytujú žiadne dve po sebe idúce čísla?
(ii) Koľko je podmnožín množiny A, v ktorých sa nevyskytujú žiadne dve po sebe idúce čísla?

Návod pre (ii). Nájdite rekurentný vzťah vyjadrujúci tento počet. Uveďte vhodné počiatočné podmienky. Rekurentnú rovnicu vyriešte.

Rozklady množín

1.3. Koľko rozkladov na n-prvkovej množiny má veľkosť m? Riešte úlohu pre tieto prípady:

(i) $n = 6$ a $m = 2, 3, 4, 5$.
(ii) $n = 7$ a $m = 2, 3, 4, 5, 6$.

Pokyny. Úlohu vyriešte buď priamo spočítaním všetkých možností alebo s pomocou rekurentnej vlastnosti Stirlinovych čísel druhého druhu.

1.4. Koľko rozkladov na n-prvkovej množine je takých, že aspoň jedna trieda rozkladu má práve resp. aspoň k prvkov? Riešte úlohu pre tieto prípady:

(i) $n = 6$ a $k = 3$.
(ii) $n = 7$ a $k = 3$.

1.5. Nech A je neprázdna n-prvková množina.

(i) Koľko je rozkladov množiny A s práve dvoma triedami? Zdôvodnite!
(ii) Koľko je rozkladov množiny A s práve $(n–1)$ triedami? Zdôvodnite!

Pokyny. Úlohu vyriešte buď priamo spočítaním všetkých možností alebo s pomocou rekurentnej vlastnosti Stirlinovych čísel druhého druhu.

1.6. Implementujte aritmetiku celých čísel na rozklade množiny $\mathbb{N}^2$, ktorý je popísaný v príklade 1.5.8. V definíciách použite len tie operácie a predikáty, ktoré sú definované pre prirodzené čísla.

(i) Definujte binárnu operáciu $+_Z$ na $\mathbb{N}^2$ takú, že platí

$$(a,b) +_Z (c,d) = (e,f) \leftrightarrow (a-b)+(c-d) = e-f.$$

(ii) Definujte binárnu operáciu $-_Z$ na $\mathbb{N}^2$ takú, že platí

$$(a,b) -_Z (c,d) = (e,f) \leftrightarrow (a-b)-(c-d) = e-f.$$

(iii) Definujte binárnu operáciu $\times_Z$ na $\mathbb{N}^2$ takú, že platí

$$(a,b) \times_Z (c,d) = (e,f) \leftrightarrow (a-b)\times(c-d) = e-f.$$

(iv) Definujte binárnu operáciu $\div_Z$ na $\mathbb{N}^2$ takú, že platí

$$(a,b) \div_Z (c,d) = (e,f) \leftrightarrow (a-b)\div(c-d) = e-f.$$

(v) Definujte binárnu operáciu $\bmod_Z$ na $\mathbb{N}^2$ takú, že platí

$$(a,b) \bmod_Z (c,d) = (e,f) \leftrightarrow (a-b) \bmod (c-d) = e-f.$$

(vi) Definujte binárny predikát $=_Z$ na $\mathbb{N}^2$ takú, že platí

$$(a,b) =_Z (c,d) \leftrightarrow a-b = c-d.$$

(vii) Definujte binárny predikát $\leq_Z$ na $\mathbb{N}^2$ takú, že platí

$$(a,b) \leq_Z (c,d) \leftrightarrow a-b \leq c-d.$$

(viii) Definujte binárny predikát $<_Z$ na $\mathbb{N}^2$ takú, že platí

$$(a,b) <_Z (c,d) \leftrightarrow a-b < c-d.$$

1.7. Implementujte aritmetiku racionálnych čísel na rozklade množiny $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$, ktorý je popísaný v príklade 1.5.9. V definíciách použite len tie operácie a predikáty, ktoré sú definované pre celé čísla.

(i) Definujte binárnu operáciu $+_Q$ na $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ takú, že platí

$$(a,b) +_Q (c,d) = (e,f) \leftrightarrow \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{e}{f}.$$

(ii) Definujte binárnu operáciu $-_Q$ na $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ takú, že platí

$$(a,b) -_Q (c,d) = (e,f) \leftrightarrow \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{e}{f}.$$

(iii) Definujte binárnu operáciu $\times_Q$ na $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ takú, že platí

$$(a, b) \times_Q (c, d) = (e, f) \leftrightarrow \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{e}{f}.$$

(iv) Definujte binárnu operáciu $:_Q$ na $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ takú, že platí

$$(a, b) :_Q (c, d) = (e, f) \leftrightarrow \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{e}{f}.$$

(v) Definujte binárny predikát $=_Q$ na $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ takú, že platí

$$(a, b) =_Q (c, d) \leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

(vi) Definujte binárny predikát $\leq_Q$ na $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ takú, že platí

$$(a, b) \leq_Q (c, d) \leftrightarrow \frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}.$$

(vii) Definujte binárny predikát $<_Q$ na $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ takú, že platí

$$(a, b) <_Q (c, d) \leftrightarrow \frac{a}{b} < \frac{c}{d}.$$

Základné množinové identity

1.8. Nájdite príklady množín A, B, C, pre ktoré nasledujúce vzťahy neplatia:

$$A \cap B \subset A \tag{1}$$
$$A \cup C = B \cup C \rightarrow A = B \tag{2}$$
$$A \cap C = B \cap C \rightarrow A = B \tag{3}$$
$$A \subseteq B \cup C \leftrightarrow A \subseteq B \vee A \subseteq C \tag{4}$$
$$A \cap B \subseteq C \leftrightarrow A \subseteq C \wedge B \subseteq C \tag{5}$$
$$\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B). \tag{6}$$

Nájdite čo najjednoduchší kontrapríklad.

1.9. Dokážte, že platí:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \tag{7}$$
$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \tag{8}$$
$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C) \tag{9}$$
$$A \subseteq B \leftrightarrow A \cup B = B. \tag{10}$$

1.10. Dokážte, že platí:

$$A \setminus B = B \setminus A \to A = B \tag{11}$$
$$A \cup C = B \cup C \wedge A \cap C = B \cap C \to A = B. \tag{12}$$

1.11. Dokážte, že platí:

$$A \subseteq B \cap C \leftrightarrow A \subseteq B \wedge A \subseteq C \tag{13}$$
$$\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B). \tag{14}$$

1.12. Dokážte, že platí:

$$A \subseteq B \vee A \subseteq C \to A \subseteq B \cup C \tag{15}$$
$$\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B). \tag{16}$$

1.13. Trochu zložitejší príklad. Nech

$$A \subseteq B \to A \cap B \not\subseteq C \tag{17}$$
$$A \subseteq B \vee A \subseteq C \tag{18}$$
$$A \cap C \subseteq B. \tag{19}$$

Dokážte, že potom platí:

$$A \cap B \not\subseteq C. \tag{20}$$