3.3 Usporiadania

3.3.1 Čiastočne a úplne usporiadania. Relácia R na množine A sa nazýva čiastočné usporiadanie, ak je to reflexívna, antisymetrická a tranzitívna relácia na A:

$$\forall x{\in}A\,(x,x)\in R$$
$$\forall x\forall y\big((x,y)\in R\wedge(y,x)\in R\to x=y\big)$$
$$\forall x\forall y\forall z\big((x,y)\in R\wedge(y,z)\in R\to(x,z)\in R\big).$$

V takomto prípade hovoríme o čiastočne usporiadanej množine (A,R).

Čiastočné usporiadanie R množiny A nazveme úplným (totálnym, lineárnym), ak každé dva prvky množiny A sú porovnateľné v relácii R, t. j.

$$\forall x{\in}A\forall y{\in}A\big((x,y)\in R\vee(y,x)\in R\big).$$

Vtedy hovoríme o úplne (totálne, lineárne) usporiadanej množine (A,R).

3.3.2 Ostré usporiadanie. Nech R je čiastočné usporiadanie množiny A. Potom nasledujúca relácia pridružená k R:

$$S=\big\{(x,y)\in A^2\ \big|\ (x,y)\in R\wedge x\neq y\big\}$$

predstavuje ostré (čiastočné) usporiadanie množiny A. Je to asymetrická a tranzitívna relácia na A:

$$\forall x\forall y\big((x,y)\in S\to(y,x)\notin S)$$
$$\forall x\forall y\forall z\big((x,y)\in S\wedge(y,z)\in S\to(x,z)\in S\big).$$

Podmienku úplnosti pre usporiadanie R je možné teraz vyjadriť pomocou tohoto dichotomického princípu:

$$\forall x{\in}A\forall y{\in}A\big((x,y)\in R\vee(y,x)\in S\big).$$

3.3.3 Veta. (Obrátené usporiadanie) *Ak R je čiastočné resp. úplné usporiadanie množiny A, potom obrátená relácia R^{-1} je tiež čiastočné resp. úplné usporiadanie množiny A.*

Dôkaz. Prenechávame čitateľovi ako cvičenie. □

3.3.4 Veta. (Zúženie usporiadania) *Nech R je čiastočné resp. úplné usporiadanie množiny A. Potom jeho zúženie na množinu $B\subseteq A$:*

$$R\cap B^2=\big\{(x,y)\in B^2\ \big|\ (x,y)\in R\big\}\subseteq B^2$$

je čiastočné resp. úplné usporiadanie množiny B.

Dôkaz. Prenechávame čitateľovi ako cvičenie. □

Špeciálne prvky usporiadaných množín

3.3.5 Minimálny a maximálny prvok množiny. Nech R je čiastočné usporiadanie množiny A. Prvok $x \in A$ sa nazýva minimálny prvok množiny A, ak

$$\forall y{\in}A\big((y,x) \in R \to y = x\big).$$

Prvok $x \in A$ sa nazýva maximálny prvok množiny A, ak

$$\forall y{\in}A\big((x,y) \in R \to y = x\big).$$

Poznámka. Úplne usporiadaná množina má nanajvýš jeden minimálny a jeden maximálny prvok.

3.3.6 Veta. *Každá neprázdna čiastočne usporiadaná konečná množina má minimálny i maximálny prvok.*

Dôkaz. Indukciou podľa veľkosti množiny A. Dokončenie dôkazu prenechávame čitateľovi ako cvičenie. □

3.3.7 Najmenší a najväčší prvok množiny. Nech R je čiastočné usporiadanie množiny A. Prvok $x \in A$ sa nazýva najmenší prvok množiny A. ak

$$\forall y{\in}A\,(x,y) \in R.$$

Prvok $x \in A$ sa nazýva najväčší prvok množiny A, ak

$$\forall y{\in}A\,(y,x) \in R.$$

Poznámka. Pre úplne usporiadané množiny sa pojmy minimálneho a najmenšieho prvku zhodujú. Podobne pre maximálny a najväčší prvok.

3.3.8 Veta. *Najmenší resp. najväčší prvok je určený jednoznačne a je to minimálny resp. maximálny prvok.*

Dôkaz. Prenechávame čitateľovi ako cvičenie. □

3.3.9 Dolné a horné ohraničenie množiny. Nech R je čiastočné usporiadanie množiny A a nech $B \subseteq A$. Prvok $x \in A$ sa nazýva dolné ohraničenie množiny B, ak

$$\forall y{\in}B\,(x,y) \in R.$$

Prvok $x \in A$ sa nazýva horné ohraničenie množiny B, ak

$$\forall y{\in}B\,(y,x) \in R.$$

3.3.10 Infinum a supremum. Nech R je čiastočné usporiadanie množiny A a nech $B \subseteq A$. Prvok $x \in A$ sa nazýva infimum množiny B (označenie $\inf B$), ak platí:

$$\forall y{\in}B\,(x,y) \in R$$
$$\forall y{\in}A\big(\forall z{\in}B\,(y,z) \in R \to (y,x) \in R\big).$$

Čiže $\inf B$, ak existuje, je najväčšie dolné ohraničenie množiny B.

Prvok $x \in A$ sa nazýva supremum množiny B (označenie $\sup B$), ak platí:

$$\forall y{\in}B\,(y,x) \in R$$
$$\forall y{\in}A\big(\forall z{\in}B\,(z,y) \in R \to (x,y) \in R\big).$$

Čiže $\sup B$, ak existuje, je najmenšie horné ohraničenie množiny B.

3.3.11 Zväzy. Čiastočne usporiadanú množinu (A,R) nazveme zväzom, ak pre každé dva prvky $x,y \in A$ existuje $\inf\{x,y\}$ a $\sup\{x,y\}$.

3.3.12 Veta. *Každá úplne usporiadaná množina je zväzom.*

Dôkaz. Prenechávame čitateľovi ako cvičenie. □

Príklady usporiadaných množín

3.3.13 Príklad. Štandardné usporiadanie množiny $\mathbb{N}$:

$$\big\{(x,y) \in \mathbb{N}^2 \;\big|\; x \leq y\big\}$$

je úplné usporiadanie na tejto množiny. Podobne pre ostatné číselné štruktúry $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$.

3.3.14 Príklad. Relácia deliteľnosti na množine $\mathbb{N}$:

$$\big\{(x,y) \in \mathbb{N}^2 \;\big|\; x \mid y\big\}$$

je čiastočným usporiadaním na $\mathbb{N}$. Pretože $2 \nmid 3$ a $3 \nmid 2$, usporiadanie nie je úplné. Usporiadanie je zväzom. Platí totiž:

$$\inf\{x,y\} = \gcd(x,y)$$
$$\sup\{x,y\} = \operatorname{lcm}(x,y).$$

3.3.15 Príklad. Relácia inklúzie na potenčnej množine množiny A:

$$\big\{(B,C) \in \mathcal{P}(A)^2 \bigm| B \subseteq C\big\}$$

je čiastočným usporiadaním tejto množiny. Pretože $\{1\} \nsubseteq \{2\}$ a $\{2\} \nsubseteq \{1\}$, usporiadanie nie je úplné pre viacprvkové univerzá. Usporiadanie je zväzom. Platí totiž:

$$\inf\{B,C\} = B \cap C$$
$$\sup\{B,C\} = B \cup C.$$

Hasseho diagram usporiadanej množiny

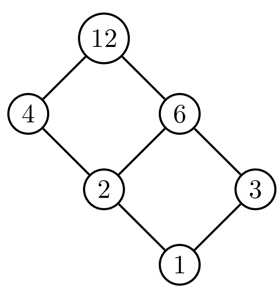
3.3.16 Definícia. Nech (A,R) je čiastočne usporiadaná množina a nech S je pridružené ostré usporiadanie množiny A (pozri 3.3.2). Prvok $y \in A$ je bezprostredný nasledovník prvku $x \in A$ v relácií R, ak

$$(x,y) \in S \wedge \neg\exists z\big((x,z) \in S \wedge (z,y) \in S\big).$$

3.3.17 Príklad. Uvažujme čiastočné usporiadanie

$$\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,6),(1,12),(2,2),(2,4),(2,6),(2,12),$$
$$(3,3),(3,6),(3,12),(4,4),(4,12),(6,6),(6,12),(12,12)\}$$

na množine $\{1,2,3,4,6,12\}$. Hasseho diagram pre túto reláciu je znázornený na nasledujúcom obrázku:



Všimnime si, že neobsahuje hrany, ktoré sú dôsledkom reflexívnosti a tranzitívnosti usporiadania. Nakreslené hrany, ktoré sú orientované zdola nahor, zachycujú vzťah bezprostredného nasledovníka v relácií R.