3.1 Základné pojmy

3.1.1 Relácia na množine. Nech A je množina. Každú podmnožinu karteziánskeho súčinu A^n nazveme n-árnou reláciou na množine A.

3.1.2 Základné vlastnosti binárnych relácií na množine. Nech R je binárna relácia na množine A.

Relácia R je reflexívna na A, ak

$$\forall x \in A\, (x, x) \in R.$$

Relácia R je ireflexívna na A, ak

$$\forall x \in A\, (x, x) \notin R.$$

Relácia R je symetrická, ak

$$\forall x \forall y \big((x, y) \in R \to (y, x) \in R\big).$$

Relácia R je antisymetrická, ak

$$\forall x \forall y \big((x, y) \in R \wedge (y, x) \in R \to x = y\big).$$

Relácia R je asymetrická, ak

$$\forall x \forall y \big((x, y) \in R \to (y, x) \notin R).$$

Relácia R je tranzitívna, ak

$$\forall x \forall y \forall z \big((x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \to (x, z) \in R\big).$$

3.1.3 Veta. *Nech R je binárna relácia na množine A.*

(i) *Relácia R je reflexívna práve vtedy, keď $\mathrm{I}_A \subseteq R$.*
(ii) *Relácia R je ireflexívna práve vtedy, keď $R \cap \mathrm{I}_A = \emptyset$.*
(iii) *Relácia R je symetrická práve vtedy, keď $R \subseteq R^{-1}$, t. j. $R = R^{-1}$.*
(iv) *Relácia R je antisymetrická práve vtedy, keď $R \cap R^{-1} \subseteq \mathrm{I}_A$.*
(v) *Relácia R je asymetrická práve vtedy, keď $R \cap R^{-1} = \emptyset$.*
(vi) *Relácia R je tranzitívna práve vtedy, keď $R \circ R \subseteq R$.*

Dôkaz. Tvrdenia plynú priamo z definície. □

3.1.4 Veta. *Nech $|A| = n$.*

(i) *Počet reflexívnych relácií na A je 2^{n^2-n}.*
(ii) *Počet ireflexívnych relácií na A je 2^{n^2-n}.*
(iii) *Počet symetrických relácií na A je $2^{\frac{n^2+n}{2}}$.*

(iv) Počet antisymetrických relácií na A je $2^n 3^{\frac{n^2-n}{2}}$.

(v) Počet asymetrických relácií na A je $3^{\frac{n^2-n}{2}}$.

Dôkaz. Dôkaz prenechávame čitateľovi. □

3.1.5 Príklady binárnych relácií na množine. Nech A je množina. Identická relácia

$$\mathrm{I}_A = \big\{(x,x) \;\big|\; x \in A\big\}$$

je binárna relácia na množine A.

Nech $m \geq 2$ je ľubovolné, ale pevne zvolené prirodzené číslo. Potom množina usporiadaných dvojíc celých čísel

$$\big\{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 \;\big|\; m \mid (x-y)\big\}$$

je reflexívna, symetrická a tranzitívna relácia na množine $\mathbb{Z}$.

Relácia neostrého usporiadania celých čísel

$$\big\{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 \;\big|\; x \leq y\big\}$$

je reflexívna, antisymetrická a tranzitívna relácia na množine $\mathbb{Z}$.

Relácia ostrého usporiadania celých čísel

$$\big\{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 \;\big|\; x < y\big\}$$

je ireflexívna, asymetrická a tranzitívna relácia na množine $\mathbb{Z}$.

Relácia deliteľnosti celých čísel

$$\big\{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 \;\big|\; x \mid y\big\}$$

je reflexívna a tranzitívna relácia na množine $\mathbb{Z}$. Relácia nie je antisymetrická. Prečo? Zúženie tejto relácie na prirodzené čísla

$$\big\{(x,y) \in \mathbb{N}^2 \;\big|\; x \mid y\big\}$$

je relácia, ktorá už je antisymetrická.