

Cvičenia

Základné pojmy

3.1. Nech R a S sú relácie na množine A . Dokážte alebo vyvráťte:

- (i) Ak R je reflexívna a $R \subseteq S$, potom aj S je reflexívna.
- (ii) Ak R je reflexívna a $R \supseteq S$, potom aj S je reflexívna.

Riešte túto úlohu tiež pre symetrické, antisymetrické, asymetrické a tranzitívne relácie.

3.2. Nech R a S sú relácie na množine A . Dokážte alebo vyvráťte:

- (i) Ak R a S sú reflexívne, potom aj $R \cup S$ je reflexívna.
- (ii) Ak R a S sú reflexívne, potom aj $R \cap S$ je reflexívna.
- (iii) Ak R je reflexívna, potom aj \overline{R} je reflexívna.
- (iv) Ak R a S sú reflexívne, potom aj $R \setminus S$ je reflexívna.

Riešte túto úlohu tiež pre symetrické, antisymetrické, asymetrické a tranzitívne relácie.

3.3. Nech R a S sú relácie na množine A . Dokážte alebo vyvráťte:

- (i) Ak R a S sú reflexívne, potom aj $R \circ S$ je reflexívna.
- (ii) Ak R je reflexívna, potom aj R^{-1} je reflexívna.

Riešte túto úlohu tiež pre symetrické, antisymetrické, asymetrické a tranzitívne relácie.

3.4. Nech A je konečná množina. Koľko je relácií na A , ktoré sú

- (i) reflexívne a symetrické,
- (ii) reflexívne a antisymetrické,
- (iii) symetrické a antisymetrické,
- (iv) symetrické a asymetrické,
- (v) antisymetrické a asymetrické,
- (vi) reflexívne, symetrické a antisymetrické?

Riešte túto úlohu tiež pre prípad, keď pevne vybraná usporiadaná dvojica je resp. nie je prvkom takej relácie.

3.5. Koľko je symetrických relácií na n -prvkovej množine, ktoré obsahujú práve k usporiadaných dvojíc? Riešte úlohu pre tieto prípady:

- (i) $n = 7$ a $k = 4, 5, 7, 8$.
- (ii) $n = 8$ a $k = 9$.

3.6. Aká je najväčšia možná hodnota $|R|$ antisymetrickej relácie R na n -prvkovej množine? Koľko antisymetrických relácií má túto veľkosť?

3.7. Aká je najväčšia možná hodnota $|R|$ asymetrickej relácie R na n -prvkovej množine? Koľko asymetrických relácií má túto veľkosť?

Relácie ekvivalencie

3.8. Nech A je neprázdna n -prvková množina. Koľko je relácií ekvivalencie na A s práve

- (i) dvoma triedami ekvivalencie?
- (ii) $(n-1)$ triedami ekvivalencie?

3.9. Koľko je relácií ekvivalencie na n -prvkovej množine, ktoré obsahujú práve k usporiadaných dvojíc? Riešte úlohu pre tieto prípady:

- (i) $n = 6$ a $k = 5, 6, 7, 8, 10, 12, 16, 18$.
- (ii) $n = 7$ a $k = 6, 7, 8, 9, 11, 13, 19, 23$.

Návod. Pozri 3.2.9.

Usporiadania

3.10. Nech $n \geq 1$ je ľubovoľné ale pevne zvolené prirodzené číslo. Nech ďalej

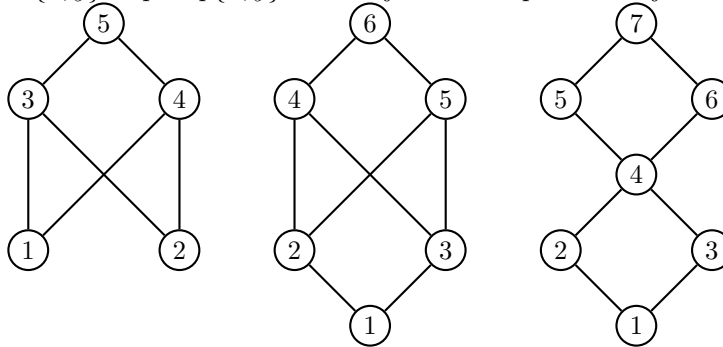
$$D_n = \{x \in \mathbb{N} \mid x \mid n\}$$

$$R_n = \{(x, y) \in D_n^2 \mid x \mid y\}.$$

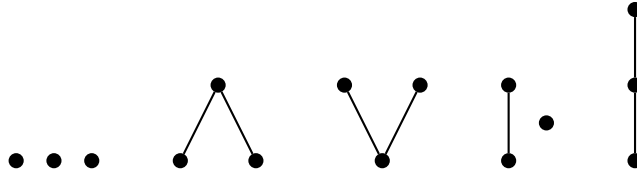
Spočítajte $|R_n|$ resp. $|\overline{R_n}|$ pre tieto prípady: $n = 12, 18, 30, 360$.

3.11. Koľko lineárnych usporiadaní je na n -prvkovej množine?

3.12. Pre nasledujúce čiastočne usporiadaná nájdite horné ohraničenia resp. dolné ohraničenia pre dvojprvkové množiny. Nájdite tie dvojice x a y , pre ktoré $\inf\{x, y\}$ resp. $\sup\{x, y\}$ neexistuje. Ktoré usporiadanie je zväzom?



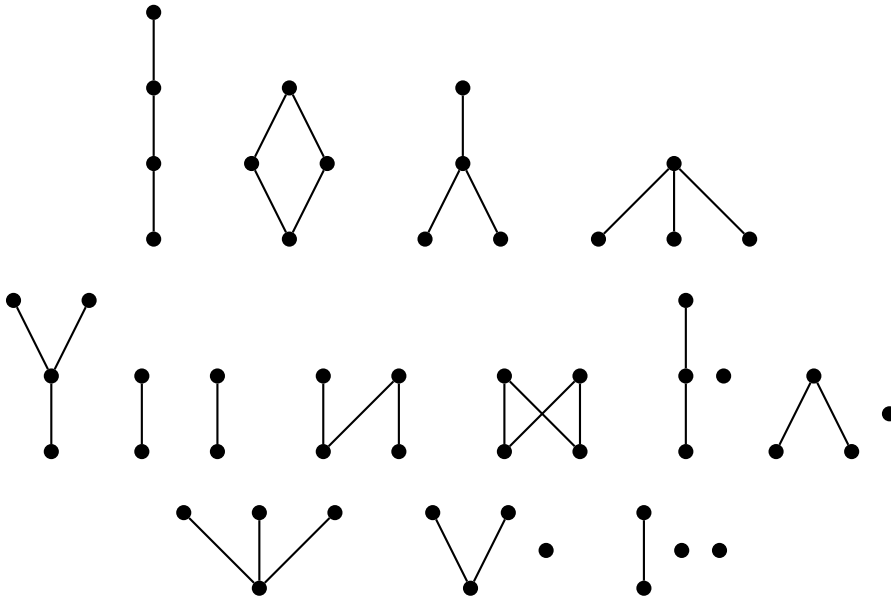
3.13. Koľko čiastočných usporiadaní na 3-prvkovej množine má Hasseho diagram nasledujúceho tvaru?



Koľko majú maximálnych resp. minimálnych prvkov? Ktoré z nich je zväzom? Ktoré z nich je lineárne usporiadanie?

3.14. Koľko čiastočných usporiadaní je na n -prvkovej množine? Riešte úlohu pre tieto prípady: $n = 1, 2, 3$.

3.15. Koľko čiastočných usporiadaní na 4-prvkovej množine má Hasseho diagram nasledujúceho tvaru (pozri obr. 3.1)? Koľko majú maximálnych resp. minimálnych prvkov? Ktoré z nich je zväzom resp. lineárnym usporiadaním?



Obr. 3.1 Hasseho diagramy čiastočných usporiadaní na 4-prvkovej množine

3.16. Koľko čiastočných usporiadaní na n -prvkovej množine je zväzom? Riešte úlohu pre tieto prípady: $n = 1, 2, 3, 4$.