3.2 Relácie ekvivalencie

3.2.1 Definícia. Binárna relácia R na množine A sa nazýva relácia ekvivalencie, ak je reflexívna, symetrická a tranzitívna na A:

$$\forall x \in A\,(x,x) \in R$$
$$\forall x \forall y \big((x,y) \in R \to (y,x) \in R\big)$$
$$\forall x \forall y \forall z \big((x,y) \in R \wedge (y,z) \in R \to (x,z) \in R\big).$$

3.2.2 Lema. *Nech R je relácia ekvivalencie na množine A a nech $x, y \in A$. Potom sú nasledujúce tvrdenia ekvivalentné:*

$$(x,y) \in R \tag{1}$$
$$\forall z \big((x,z) \in R \leftrightarrow (y,z) \in R\big) \tag{2}$$
$$\exists z \big((x,z) \in R \wedge (y,z) \in R\big) \tag{3}$$
$$\exists z \big((z,x) \in R \wedge (z,y) \in R\big). \tag{4}$$

Dôkaz. (1) $\to$ (2): Nech $(x,y) \in R$. Nech z je také, že $(x,z) \in R$. Zo symetrickosti R vyplýva, že $(y,x) \in R$. Z tranzitívnosti R teraz dostaneme, že aj $(y,z) \in R$. Tým sme dokázali implikáciu ($\to$) v (2). Opačná implikácia plynie priamo z tranzitívnosti R.

(2) $\to$ (3): Pre x dosadené za z vo vzťahu (2) dostaneme, že platí

$$(x,x) \in R \leftrightarrow (y,x) \in R.$$

Z reflexívnosti R plynie $(x,x) \in R$. Preto aj $(y,x) \in R$. To znamená, že platí

$$(x,x) \in R \wedge (y,x) \in R.$$

Z toho už potom plynie požadované tvrdenie (3).

(3) $\to$ (4): Zo symetrickosti R.

(4) $\to$ (1): Nech $(z,x) \in R$ a $(z,y) \in R$ pre nejaké z. Zo symetrickosti R vyplýva, že $(x,z) \in R$. Z tranzitívnosti R dostaneme, že aj $(x,y) \in R$. $\square$

3.2.3 Triedy ekvivalencie. Nech R je relácia ekvivalencie na množine A. Zápisom $[x]_R$ označujeme triedu ekvivalencie určenej prvkom $x \in A$:

$$[x]_R = \{y \in A \mid (x,y) \in R\}.$$

3.2.4 Lema. *Nech R je relácia ekvivalencie na množine A a nech $x, y \in A$. Potom sú nasledujúce tvrdenia ekvivalentné:*

$$(x, y) \in R \tag{1}$$
$$[x]_R = [y]_R \tag{2}$$
$$[x]_R \cap [y]_R \neq \emptyset \tag{3}$$
$$\exists z\big(x \in [z]_R \wedge y \in [z]_R\big). \tag{4}$$

Dôkaz. Najprv si všimnime, že platí

$$[x]_R = [y]_R \Leftrightarrow \forall z\big(z \in [x]_R \leftrightarrow z \in [y]_R\big) \Leftrightarrow \forall z\big((x,z) \in R \leftrightarrow (y,z) \in R\big)$$
$$[x]_R \cap [y]_R \neq \emptyset \Leftrightarrow \exists z\big(z \in [x]_R \wedge z \in [y]_R\big) \Leftrightarrow \exists z\big((x,z) \in R \wedge (y,z) \in R\big)$$
$$\exists z\big(x \in [z]_R \wedge y \in [z]_R\big) \Leftrightarrow \exists z\big((z,x) \in R \wedge (z,y) \in R\big).$$

Teraz stačí využiť výsledky Lemy 3.2.2. □

3.2.5 Veta. *Nech R je relácia ekvivalencie na množine A. Potom systém množín S:*

$$S = \{[x]_R \mid x \in A\} \tag{1}$$

je rozkladom množiny A, pre ktorý platí

$$R = \big\{(x,y) \in A^2 \;\big|\; \exists B{\in}S(x \in B \wedge y \in B)\big\}. \tag{2}$$

Dôkaz. Z reflexívnosti relácie R plynie, že

$$\forall x{\in}A\, x \in [x]_R \subseteq A.$$

Odtiaľ ihneď dostaneme rovnosť

$$\bigcup S = A.$$

Druhý požadovaný vzťah

$$\forall B{\in}S \forall C{\in}S (B = C \leftrightarrow B \cap C \neq \emptyset)$$

je zas dôsledok ekvivalencie 3.2.4(2)(3). Tým sme dokázali, že S je rozklad množiny A. Z ekvivalencie 3.2.4(1)(4) plynie, že platí vzťah (2). □

Poznámka. Rozklad S definovaný v tejto vete sa nazýva rozklad indukovaný ekvivalenciou R.

3.2.6 Veta. *Nech S je rozklad množiny A. Potom binárna relácia R:*

$$R = \big\{(x,y) \in A^2 \;\big|\; \exists B{\in}S(x \in B \wedge y \in B)\big\} \tag{1}$$

je reláciou ekvivalencie na množine A, pre ktorú platí

$$S = \{[x]_R \mid x \in A\}. \tag{2}$$

Dôkaz. Pozri [Ok07]. □

Poznámka. Binárna relácia R definovaná v tejto vete sa nazýva ekvivalencia indukovaná rozkladom S.

3.2.7 Veta.

(i) Ak R je relácia ekvivalencie na množine A a S je ňou indukovaný rozklad, potom R je totožná s ekvivalenciou indukovanou rozkladom S.
(ii) Ak S je rozklad množiny A a R je nim indukovaná ekvivalencia, potom S je totožný s rozkladom indukovaným ekvivalenciou R.

Dôkaz. Je to dôsledok vzťahov 3.2.5(2) a 3.2.6(2) z predošlých tvrdení. □

3.2.8 Veta. *Počet relácií ekvivalencie na n-prvkovej množine je* B_n.

Dôkaz. Dôsledok predošlého tvrdenia a faktu, že číslo B_n predstavuje počet rozkladov n-prvkovej množiny (pozri 1.5.5). □

3.2.9 Poznámka. Nech $|A| = n \leq r \leq n^2$. Potom na množine A existuje relácia ekvivalencie s r prvkami práve vtedy, keď existujú kladné celé čísla $k_1, \ldots, k_m$ také, že

$$\begin{aligned} n &= k_1 + \cdots + k_m \\ r &= k_1^2 + \cdots + k_m^2. \end{aligned}$$

Príklady

3.2.10 Príklad. Identická relácia I_A na množine A:

$$\mathrm{I}_A = \big\{(x, y) \in A^2 \;\big|\; x = y\big\}$$

je relácia ekvivalencie na množine A. Rozklad indukovaný touto ekvivalenciou je systém všetkých jednoprvkových podmnožín množiny A:

$$\big\{\{x\} \;\big|\; x \in A\big\}.$$

3.2.11 Príklad. Nech $m \geq 2$ je ľubovolné, ale pevne zvolené prirodzené číslo. Potom množina usporiadaných dvojíc celých čísel definovaná predpisom:

$$\big\{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \;\big|\; m \mid (x - y)\big\}$$

je relácia ekvivalencie na množine $\mathbb{Z}$. Ľahko sa ukáže, že systém zvyškových tried po delení číslom m:

$$\big\{\{x \in \mathbb{Z} \mid x \bmod m = r\} \;\big|\; r \in \mathbb{Z} \wedge 0 \leq r < m\big\}$$

tvorí rozklad množiny $\mathbb{Z}$ indukovaný touto ekvivalenciou. Pozri tiež 1.5.7.

3.2.12 Príklad. Nasledujúca množina

$$\left\{\big((a,b),(c,d)\big) \in \mathbb{N}^2 \;\middle|\; a + d = c + b\right\}$$

je relácia ekvivalencie na množine $\mathbb{N}^2$. Rozklad indukovaný touto ekvivalenciou je izomorfný množine celých čísel $\mathbb{Z}$. Pozri tiež 1.5.8.

3.2.13 Príklad. Nasledujúca množina

$$\left\{\big((a,b),(c,d)\big) \in \big(\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})\big)^2 \;\middle|\; ad = cb\right\}$$

je relácia ekvivalencie na množine $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$. Rozklad indukovaný touto ekvivalenciou je izomorfný množine racionálnych čísel $\mathbb{Q}$. Pozri tiež 1.5.9.