2.4 Obraz a vzor množiny v relácii

2.4.1 Definícia. Zápis $R[X]$ znamená obraz množiny X v relácii R:

$$R[X] = \{y \mid \exists x{\in}X\ (x,y) \in R\}.$$

Zápis $R^{-1}[Y]$ znamená vzor množiny Y v relácii R:

$$R^{-1}[Y] = \{x \mid \exists y{\in}Y\ (x,y) \in R\} = \{x \mid \exists y{\in}Y\ (y,x) \in R^{-1}\}.$$

Množina $R^{-1}[Y]$ je teda zároveň obrazom množiny Y v relácii R^{-1}. Platí

$$R \subseteq A \times B \wedge X \subseteq A \to R[X] \subseteq B$$
$$R \subseteq A \times B \wedge Y \subseteq B \to R^{-1}[Y] \subseteq A.$$

2.4.2 Veta. *Pre ľubovolnú binárnu reláciu R a množiny X_1, X_2 platí:*

$$X_1 \subseteq X_2 \to R[X_1] \subseteq R[X_2] \tag{1}$$
$$R[X_1 \cup X_2] = R[X_1] \cup R[X_2] \tag{2}$$
$$R[X_1 \cap X_2] \subseteq R[X_1] \cap R[X_2] \tag{3}$$
$$R[X_1 \setminus X_2] \supseteq R[X_1] \setminus R[X_2]. \tag{4}$$

Dôkaz. (2): Nech y je ľubovolný objekt. Postupnými úpravami dostaneme

$y \in R[X_1 \cup X_2] \Leftrightarrow \{$z definície $R[X_1 \cup X_2]\}$
$\exists x\big(x \in X_1 \cup X_2 \wedge (x,y) \in R\big) \Leftrightarrow \{$z definície zjednotenia$\}$
$\exists x\big((x \in X_1 \vee x \in X_2) \wedge (x,y) \in R\big) \Leftrightarrow$
$\exists x\Big(\big(x \in X_1 \wedge (x,y) \in R\big) \vee \big(x \in X_2 \wedge (x,y) \in R\big)\Big) \Leftrightarrow$
$\exists x\big(x \in X_1 \wedge (x,y) \in R\big) \vee \exists x\big(x \in X_2 \wedge (x,y) \in R\big) \Leftrightarrow \{$z def. $R[X_1]$,$R[X_2]\}$
$y \in R[X_1] \vee y \in R[X_2] \Leftrightarrow \{$z definície zjednotenia$\}$
$y \in R[X_1] \cup R[X_2]$.

Ostatné vlastnosti sa dokážu podobne. □

2.4.3 Veta. *Nech A, B, X, Y sú množiny také, že $X \subseteq A$ a $Y \subseteq B$. Potom pre ľubovolnú binárnu reláciu R z A do B platí:*

$$R[X] \subseteq Y \leftrightarrow R \cap (X \times \overline{Y}) = \emptyset \tag{1}$$
$$R[X] \supseteq Y \leftrightarrow \operatorname{rng}\big(R \cap (X \times Y)\big) = Y \tag{2}$$
$$R[X] = Y \leftrightarrow R \cap (X \times \overline{Y}) = \emptyset \wedge \operatorname{rng}\big(R \cap (X \times Y)\big) = Y. \tag{3}$$

Dôkaz. (1): Postupnými úpravami dostaneme

$R[X] \subseteq Y \Leftrightarrow$ {z definície inklúzie}
$\forall y\big(y \in R[X] \rightarrow y \in Y\big) \Leftrightarrow$ {z definície $R[X]$}
$\forall y\big(\exists x{\in}X\, (x, y) \in R \rightarrow y \in Y\big) \Leftrightarrow$
$\forall x \forall y\big(x \in X \wedge (x, y) \in R \rightarrow y \in Y\big) \Leftrightarrow$
$\forall x \forall y \neg\big((x, y) \in R \wedge x \in X \wedge y \notin Y\big) \Leftrightarrow$ {z definície komplementu $\overline{Y}$}
$\forall x \forall y \neg\big((x, y) \in R \wedge x \in X \wedge y \in \overline{Y}\big) \Leftrightarrow$ {z definície $X \times \overline{Y}$}
$\forall x \forall y \neg\big((x, y) \in R \wedge (x, y) \in X \times \overline{Y}\big) \Leftrightarrow$ {z definície prieniku}
$\forall x \forall y\, (x, y) \notin R \cap (X \times \overline{Y}) \Leftrightarrow$ {z definície $\emptyset$}
$\forall x \forall y\big((x, y) \in R \cap (X \times \overline{Y}) \leftrightarrow (x, y) \in \emptyset\big) \Leftrightarrow$ {rovnosť relácií 2.1.3(1)}
$R \cap (X \times \overline{Y}) = \emptyset.$

(2): Dokáže sa to podobne. (3): Dôsledok (1) a (2). $\square$