2.3 Opačná relácia

2.3.1 Definícia. Opačnou (inverznou) reláciou k binárnej relácii R rozumieme binárnu reláciu R^{-1} definovanú predpisom

$$R^{-1} = \{(x, y) \mid (y, x) \in R\}.$$

Priamo z definície dostaneme, že

$$\operatorname{dom} R^{-1} = \operatorname{rng} R \wedge \operatorname{rng} R^{-1} = \operatorname{dom} R.$$

Zrejme tiež platí

$$R \subseteq A \times B \to R^{-1} \subseteq B \times A.$$

Čiže, ak $R \subseteq A \times B$, potom

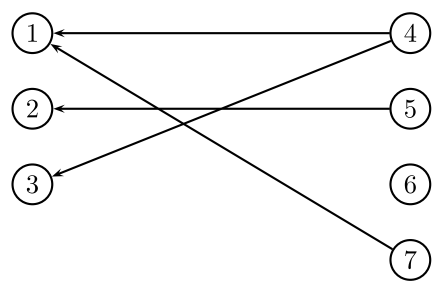
$$R^{-1} = \{(x, y) \in B \times A \mid (y, x) \in R\} \subseteq B \times A.$$

2.3.2 Príklad. Nech R je binárna relácia 2.1.5(1) z množiny $A = \{1, 2, 3\}$ do množiny $B = \{4, 5, 6, 7\}$. Potom jej opačná relácia

$$R^{-1} = \{(4, 1), (4, 3), (5, 2), (7, 1)\}$$

je binárnou reláciou z množiny B do množiny A.

Grafická reprezentácia opačnej relácie. Nasledujúci obrázok graficky znázorňuje opačnú reláciu R^{-1}:



Stačilo len zmeniť smer šípiek v grafickom zobrazení relácie R.

Maticová reprezentácia relácie opačnej relácie. Nasledujúca boolovská matica reprezentuje opačnú reláciu R^{-1}:

$$\mathcal{M}(R^{-1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \mathcal{M}(R)^{\mathrm{T}}.$$

Tu $\mathcal{M}(R)^{\mathrm{T}}$ predstavuje transponovanú maticu k matici $\mathcal{M}(R)$.

2.3.3 Veta. *Pre ľubovolné binárne relácie R, S platí:*

$$(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}.$$

Dôkaz. Nech c a a sú ľubovolné objekty. Postupnými úpravami dostaneme

$$\begin{aligned}
&(c, a) \in (R \circ S)^{-1} \Leftrightarrow \{\text{z definície } (R \circ S)^{-1}\}\\
&(a, c) \in R \circ S \Leftrightarrow \{\text{z definície } R \circ S\}\\
&\exists b\big((a, b) \in R \wedge (b, c) \in S\big) \Leftrightarrow\\
&\exists b\big((b, c) \in S \wedge (a, b) \in R\big) \Leftrightarrow \{\text{z definície } S^{-1} \text{ a } R^{-1}\}\\
&\exists b\big((c, b) \in S^{-1} \wedge (b, a) \in R^{-1}\big) \Leftrightarrow \{\text{z definície } S^{-1} \circ R^{-1}\}\\
&(c, a) \in S^{-1} \circ R^{-1}.
\end{aligned}$$

Dokázali sme, že platí

$$\forall c \forall a\big((c, a) \in (R \circ S)^{-1} \leftrightarrow (c, a) \in S^{-1} \circ R^{-1}\big).$$

Z toho a 2.1.3(1) plynie požadované tvrdenie. $\square$