2.6 Jednoznačné relácie

2.6.1 Definícia. Hovoríme, že binárna relácia R je jednoznačná relácia, ak

$$\forall x \forall y_1 \forall y_2 \big((x, y_1) \in R \wedge (x, y_2) \in R \rightarrow y_1 = y_2\big).$$

Čiže ak $R \subseteq A \times B$, potom R je jednoznačná relácia práve vtedy, keď

$$\forall x{\in}A \forall y_1{\in}B \forall y_2{\in}B \big((x, y_1) \in R \wedge (x, y_2) \in R \rightarrow y_1 = y_2\big).$$

2.6.2 Veta. *Nech $R \subseteq A \times B$. Relácia R je jednoznačná relácia práve vtedy, keď $R^{-1} \circ R \subseteq \mathrm{I}_B$.*

Dôkaz. Postupnými úpravami dostávame:

$$\forall x{\in}A \forall y_1{\in}B \forall y_2{\in}B \big((x, y_1) \in R \wedge (x, y_2) \in R \rightarrow y_1 = y_2\big) \Leftrightarrow \{\text{z def. } R^{-1}\}$$
$$\forall x{\in}A \forall y_1{\in}B \forall y_2{\in}B \big((y_1, x) \in R^{-1} \wedge (x, y_2) \in R \rightarrow y_1 = y_2\big) \Leftrightarrow$$
$$\forall y_1{\in}B \forall y_2{\in}B \Big(\exists x{\in}A \big((y_1, x) \in R^{-1} \wedge (x, y_2) \in R\big) \rightarrow y_1 = y_2\Big) \overset{\text{z def. } R^{-1} \circ R}{\Leftrightarrow}$$
$$\forall y_1{\in}B \forall y_2{\in}B \big((y_1, y_2) \in R^{-1} \circ R \rightarrow y_1 = y_2\big) \Leftrightarrow \{\text{z definície } \mathrm{I}_B\}$$
$$\forall y_1{\in}B \forall y_2{\in}B \big((y_1, y_2) \in R^{-1} \circ R \rightarrow (y_1, y_2) \in \mathrm{I}_B\big) \Leftrightarrow \{\text{z def. podmnožiny}\}$$
$$R^{-1} \circ R \subseteq \mathrm{I}_B.$$
□

2.6.3 Veta. *Nech $|A| = m$ a $|B| = n$.*

(i) Počet jednoznačných relácií z A do B je

$$(n+1)^m.$$

(ii) Počet jednoznačných relácií R z A do B takých, že $\operatorname{rng} R = B$, je

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k+1)^m.$$

Dôkaz. (i): Boolovská matica jednoznačnej relácie z A do B pozostáva len z takých riadkov, ktoré obsahujú nanajvýš jednu jednotku. Každý takýto riadok môžeme vytvoriť $n+1$ spôsobmi. Hľadaný počet je potom jednoduchým dôsledkom násobiaceho princípu:

$$\overbrace{(n+1) \times \cdots \times (n+1)}^{m\text{-krát}} = (n+1)^m.$$

(ii): Nech $\mathcal{U}$ je množina všetkých jednoznačných relácií z A do B. Označme $\mathcal{B}_i$ pre $1 \leq i \leq n$ množinu tých prvkov R z $\mathcal{U}$, ktoré majú vlastnosť „i-tý prvok množiny B sa nenachádza v množine $\operatorname{rng} R$“. Podľa (i) všetky množiny

$\mathcal{B}_{i_1} \cap \cdots \cap \mathcal{B}_{i_k}$ majú rovnako veľa prvkov pre ľubovolný výber prirodzených čísel k a $1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n$:

$$|\mathcal{B}_{i_1} \cap \cdots \cap \mathcal{B}_{i_k}| = (n - k + 1)^m.$$

Podľa princípu zapojenia a vypojenia hľadaný počet je preto rovný číslu

$$\left|\bigcap_{i=1}^{n} \overline{\mathcal{B}_i}\right| = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \left|\bigcap_{i=1}^{k} \mathcal{B}_i\right| = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n - k + 1)^m. \qquad \square$$