## 2.5 Všade definované relácie

**2.5.1 Definícia.** Nech $R \subseteq A \times B$. Hovoríme, že binárna relácia $R$ je všade definovaná na $A$, ak $\operatorname{dom} R = A$, t. j.

$$\forall x{\in}A \exists y{\in}B\, (x, y) \in R.$$

Z definície je okamžite zrejmé, že každá binárna relácia je všade definovanou reláciou na svojom definičnom obore.

**2.5.2 Veta.** *Nech $R \subseteq A \times B$. Relácia $R$ je všade definovaná na $A$ práve vtedy, keď $\mathrm{I}_A \subseteq R \circ R^{-1}$.*

*Dôkaz.* Postupnými úpravami dostávame:

$$\begin{aligned}
&\forall x{\in}A \exists y{\in}B\, (x, y) \in R \Leftrightarrow \\
&\forall x{\in}A \exists y{\in}B \big((x, y) \in R \wedge (x, y) \in R\big) \Leftrightarrow \{\text{z definície } R^{-1}\} \\
&\forall x{\in}A \exists y{\in}B \big((x, y) \in R \wedge (y, x) \in R^{-1}\big) \Leftrightarrow \{\text{z definície } R \circ R^{-1}\} \\
&\forall x{\in}A\, (x, x) \in R \circ R^{-1} \Leftrightarrow \\
&\forall x_1{\in}A \forall x_2{\in}A \big(x_1 = x_2 \to (x_1, x_2) \in R \circ R^{-1}\big) \Leftrightarrow \{\text{z definície } \mathrm{I}_A\} \\
&\forall x_1{\in}A \forall x_2{\in}A \big((x_1, x_2) \in \mathrm{I}_A \to (x_1, x_2) \in R \circ R^{-1}\big) \Leftrightarrow \{\text{z def. podmnožiny}\} \\
&\mathrm{I}_A \subseteq R \circ R^{-1}.
\end{aligned}$$

□

**2.5.3 Veta.** *Nech $|A| = m$ a $|B| = n$.*

*(i) Počet všade definovaných relácií z $A$ do $B$ je*

$$(2^n - 1)^m.$$

*(ii) Počet všade definovaných relácií $R$ z $A$ do $B$ takých, že $\operatorname{rng} R = B$, je*

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (2^{n-k} - 1)^m.$$

*Dôkaz.* (i): Boolovská matica všade definovanej relácie z $A$ do $B$ pozostáva len z takých riadkov, ktoré obsahujú aspoň jednu jednotku. Každý takýto riadok môžeme vytvoriť $2^n - 1$ spôsobmi. Hľadaný počet je potom jednoduchým dôsledkom násobiaceho princípu:

$$\overbrace{(2^n - 1) \times \cdots \times (2^n - 1)}^{m\text{-krát}} = (2^n - 1)^m.$$

(ii): Nech $\mathcal{U}$ je množina všetkých všade definovaných relácií z $A$ do $B$. Označme $\mathcal{B}_i$ pre $1 \leq i \leq n$ množinu tých prvkov $R$ z $\mathcal{U}$, ktoré majú vlastnosť

„$i$-tý prvok množiny $B$ sa nenachádza v množine $\operatorname{rng} R$“. Podľa (i) všetky množiny $\mathcal{B}_{i_1} \cap \cdots \cap \mathcal{B}_{i_k}$ majú rovnako veľa prvkov pre ľubovolný výber prirodzených čísel $k$ a $1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n$:

$$|\mathcal{B}_{i_1} \cap \cdots \cap \mathcal{B}_{i_k}| = (2^{n-k} - 1)^m.$$

Podľa princípu zapojenia a vypojenia hľadaný počet je preto rovný číslu

$$\left| \bigcap_{i=1}^{n} \overline{\mathcal{B}_i} \right| = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \left| \bigcap_{i=1}^{k} \mathcal{B}_i \right| = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (2^{n-k} - 1)^m. \qquad \square$$