2.2 Skladanie relácií

2.2.1 Definícia. Zložením binárnych relácií R a S rozumieme binárnu reláciu $R \circ S$ definovanú predpisom

$$R \circ S = \big\{(x, z) \;\big|\; \exists y\big((x, y) \in R \wedge (y, z) \in S\big)\big\}.$$

Zrejme platí

$$R \subseteq A \times B \wedge S \subseteq B \times C \to R \circ S \subseteq A \times C.$$

Čiže ak $R \subseteq A \times B$ a $S \subseteq B \times C$, potom

$$R \circ S = \big\{(x, z) \in A \times C \;\big|\; \exists y{\in}B\big((x, y) \in R \wedge (y, z) \in S\big)\big\} \subseteq A \times C.$$

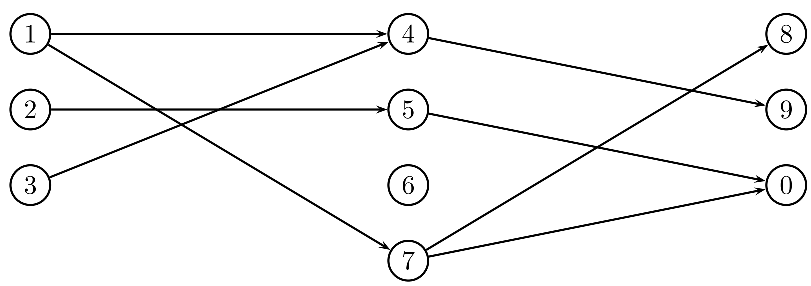
2.2.2 Príklad. Nech R je binárna relácia 2.1.5(1) z množiny $A = \{1, 2, 3\}$ do množiny $B = \{4, 5, 6, 7\}$. Nech ďalej

$$S = \{(4, 9), (5, 0), (7, 8), (7, 0)\}$$

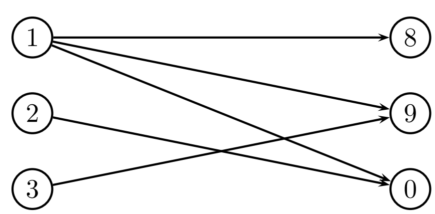
je binárna relácia z množiny B do množiny $C = \{8, 9, 0\}$. Potom $R \circ S$ je binárna relácia z množiny A do množiny C:

$$R \circ S = \{(1, 8), (1, 9), (1, 0), (2, 0), (3, 9)\}.$$

Grafická reprezentácia zloženej relácie. Najprv grafické znázornenie oboch relácií R a S v tom poradí, v akom vystupujú v argumentoch operácie $R \circ S$:



Graficky znázorniť zloženú reláciu $R \circ S$ znamená nájsť také šipky, ktoré spájajú prvky množiny A a C cez nejaký prvok množiny B. Dostaneme tak nasledujúci obrázok:



Maticová reprezentácia zloženej relácie. Nasledujúca boolovská matica reprezentuje binárnu reláciu $R \circ S$:

$$\mathcal{M}(R \circ S) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathcal{M}(R) \times \mathcal{M}(S).$$

Tu $\mathcal{M}(R) \times \mathcal{M}(S)$ predstavuje súčin boolovských matíc $\mathcal{M}(R)$ a $\mathcal{M}(S)$.

2.2.3 Veta. *Pre ľubovolné binárne relácie R, S, T platí:*

$$(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T).$$

Dôkaz. Nech a a d sú ľubovolné objekty. Postupnými úpravami dostaneme

$$\begin{aligned}
&(a, d) \in (R \circ S) \circ T \Leftrightarrow \{\text{z definície } (R \circ S) \circ T\} \\
&\exists c\big((a, c) \in R \circ S \wedge (c, d) \in T\big) \Leftrightarrow \{\text{z definície } R \circ S\} \\
&\exists c\Big(\exists b\big((a, b) \in R \wedge (b, c) \in S\big) \wedge (c, d) \in T\Big) \Leftrightarrow \\
&\exists b\Big((a, b) \in R \wedge \exists c\big((b, c) \in S \wedge (c, d) \in T\big)\Big) \Leftrightarrow \{\text{z definície } S \circ T\} \\
&\exists b\big((a, b) \in R \wedge (b, d) \in S \circ T\big) \Leftrightarrow \{\text{z definície } R \circ (S \circ T)\} \\
&(a, d) \in R \circ (S \circ T).
\end{aligned}$$

Dokázali sme, že platí

$$\forall a \forall d\big((a, d) \in (R \circ S) \circ T \leftrightarrow (a, d) \in R \circ (S \circ T)\big).$$

Z toho a 2.1.3(1) plynie požadované tvrdenie. □

Poznámka. Dokázali sme, že skladanie binárnych relácií je asociatívna operácia. Z toho dôvodu budeme zátvorky vo výraze $R \circ S \circ T$ vynechávať.