2.1 Základné pojmy

2.1.1 Binárna relácia. Množinu R nazveme binárnou reláciou, ak jej jediné prvky sú usporiadané dvojice, t. j.

$$\forall x{\in}R \exists y \exists z\, x = (y, z).$$

Príkladom takejto relácie je ľubovolná podmnožina karteziánskeho súčinu $A \times B$. V takomto prípade ju nazveme binárnou reláciou medzi prvkami množín A a B (v tomto poradí) alebo tiež binárnou reláciou z množiny A do množiny B. Ak $A = B$, tak hovoríme o relácii na množine A.

2.1.2 Obory relácie. Symbolom $\operatorname{dom} R$ označujeme definičný obor binárnej relácie R:

$$\operatorname{dom} R = \{x \mid \exists y\, (x, y) \in R\}.$$

Symbolom $\operatorname{rng} R$ označujeme obor hodnôt binárnej relácie R:

$$\operatorname{rng} R = \{y \mid \exists x\, (x, y) \in R\}.$$

Pre binárnu reláciu R platí

$$\begin{gathered} R \subseteq \operatorname{dom} R \times \operatorname{rng} R \\ R \subseteq A \times B \leftrightarrow \operatorname{dom} R \subseteq A \wedge \operatorname{rng} R \subseteq B. \end{gathered}$$

2.1.3 Základné vzťahy medzi reláciami. Ak R a S sú binárne relácie, potom

$$\begin{aligned} R = S &\leftrightarrow \forall x \forall y \big((x, y) \in R \leftrightarrow (x, y) \in S\big) \qquad (1) \\ R \subseteq S &\leftrightarrow \forall x \forall y \big((x, y) \in R \rightarrow (x, y) \in S\big) \end{aligned}$$

Ak navyše $R \subseteq A \times B$ a $S \subseteq A \times B$, potom

$$\begin{aligned} R = S &\leftrightarrow \forall x{\in}A \forall y{\in}B \big((x, y) \in R \leftrightarrow (x, y) \in S\big) \\ R \subseteq S &\leftrightarrow \forall x{\in}A \forall y{\in}B \big((x, y) \in R \rightarrow (x, y) \in S\big). \end{aligned}$$

2.1.4 Identická relácia. Symbolom I_A označujeme identickú reláciu na A:

$$\mathrm{I}_A = \{(x, x) \mid x \in A\}.$$

Nazýva sa tiež relácia rovnosti na množine A, pretože platí

$$\mathrm{I}_A = \{(x, y) \in A^2 \mid x = y\}.$$

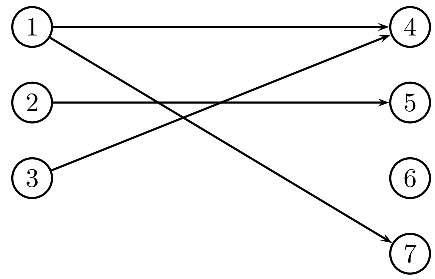
Iné časté pomenovanie je diagonála množiny A.

2.1.5 Príklad. Množina usporiadaných dvojíc

$$R = \{(1,4),(1,7),(2,5),(3,4)\} \tag{1}$$

je binárnou reláciou z množiny $A = \{1,2,3\}$ do množiny $B = \{4,5,6,7\}$. Platí pritom $\operatorname{dom} R = \{1,2,3\}$ a $\operatorname{rng} R = \{4,5,7\}$.

Grafická reprezentácia relácie. Nasledujúci obrázok graficky znázorňuje binárnu reláciu R:



Uzly grafu odpovedajú jednotlivým prvkom množiny A a B. Orientované hrany (šipky) odpovedajú jednotlivým usporiadaným dvojiciam relácie R.

Maticová reprezentácia relácie. Boolovská matica

$$\mathcal{M}(R) = \begin{pmatrix} 1\,0\,0\,1 \\ 0\,1\,0\,0 \\ 1\,0\,0\,0 \end{pmatrix}$$

jednoznačne popisuje binárnu reláciu R. Platí totiž

$$(\mathcal{M}(R))_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{ak } (i,j) \in R, \\ 0 & \text{ak } (i,j) \notin R. \end{cases}$$

2.1.6 Veta. *Nech* $|A| = m$ *a* $|B| = n$.

(i) Počet binárných relácií z A do B je

$$2^{mn}.$$

(ii) Počet binárných relácií R z A do B takých, že $\operatorname{rng} R = B$, je

$$(2^m - 1)^n.$$

Dôkaz. (i): Boolovská matica binárnej relácie z A do B pozostáva z mn prvkov. Každý takýto prvok môžeme vytvoriť 2 spôsobmi. Hľadaný počet je potom jednoduchým dôsledkom násobiaceho princípu:

$$\overbrace{2 \times \cdots \times 2}^{mn\text{-krát}} = 2^{mn}.$$

(ii): Boolovská matica binárnej relácie z A do B, pre ktorú $\operatorname{rng} R = B$, pozostáva len z takých stĺpcov, ktoré obsahujú aspoň jednu jednotku. Každý takýto stĺpec môžeme vytvoriť $2^m - 1$ spôsobmi. Hľadaný počet je potom jednoduchým dôsledkom násobiaceho princípu:

$$\overbrace{(2^m - 1) \times \cdots \times (2^m - 1)}^{n\text{-krát}} = (2^m - 1)^n. \qquad \square$$