Cvičenia

Základné pojmy

Skladanie relácií

2.1. Nájdite príklad binárnych relácií R, S, pre ktoré nasledujúce tvrdenie neplatí:

$$R \circ S = R \circ S.$$

2.2. Dokážte, že pre ľubovolné binárne relácie R, S, T platí:

$$R \subseteq S \to R \circ T \subseteq S \circ T$$
$$R \subseteq S \to T \circ R \subseteq T \circ S.$$

2.3. Dokážte, že pre ľubovolné binárne relácie R, S, T platí:

$$R \circ (S \cup T) = (R \circ S) \cup (R \circ T)$$
$$(R \cup S) \circ T = (R \circ T) \cup (S \circ T).$$

2.4. Dokážte, že pre ľubovolné binárne relácie R, S, T platí:

$$R \circ (S \cap T) \subseteq (R \circ S) \cap (R \circ T)$$
$$(R \cap S) \circ T \subseteq (R \circ T) \cap (S \circ T).$$

Ukážte tiež, že v oboch tvrdeniach nemusí platiť rovnosť.

2.5. Dokážte, že pre ľubovolné binárne relácie R, S, T platí:

$$R \circ (S \setminus T) \supseteq (R \circ S) \setminus (R \circ T)$$
$$(R \setminus S) \circ T \supseteq (R \circ T) \setminus (S \circ T).$$

Ukážte tiež, že v oboch tvrdeniach nemusí platiť rovnosť.

Opačná relácia

2.6. Dokážte, že pre ľubovolné množiny A, B platí:

$$(A \times B)^{-1} = B \times A.$$

2.7. Dokážte, že pre ľubovolné binárne relácie R, S platí:

$$R^{-1} \subseteq S^{-1} \leftrightarrow R \subseteq S$$
$$R^{-1} = S^{-1} \leftrightarrow R = S.$$

2.8. Dokážte, že pre ľubovolné binárne relácie R, S platí:

$$\emptyset^{-1} = \emptyset$$
$$\left(R^{-1}\right)^{-1} = R$$
$$(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$$
$$(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$$
$$(R \setminus S)^{-1} = R^{-1} \setminus S^{-1}.$$

Obraz a vzor množiny v relácii

2.9. Nájdite príklad binárnej relácie R a množín X_1, X_2, pre ktoré nasledujúce tvrdenia neplatí:

$$R[X_1 \cap X_2] = R[X_1] \cap R[X_2]$$
$$R[X_1 \setminus X_2] = R[X_1] \setminus R[X_2].$$

2.10. Nech R, S sú binárne relácie a nech X je množina. Dokážte, že platí:

$$R \subseteq S \rightarrow R[X] \subseteq S[X]$$
$$(R \cup S)[X] = R[X] \cup S[X]$$
$$(R \cap S)[X] \subseteq R[X] \cap S[X]$$
$$(R \setminus S)[X] \supseteq R[X] \setminus S[X].$$

Ukážte tiež, že v posledných dvoch tvrdeniach nemusí platiť rovnosť.

2.11. Nech R, S sú binárne relácie a nech X, Y sú množiny. Dokážte, že platí:

$$(R \circ S)[X] = R[S[X]]$$
$$X \subseteq \operatorname{dom} R \leftrightarrow X \subseteq (R \circ R^{-1})[X]$$
$$Y \subseteq \operatorname{rng} R \leftrightarrow Y \subseteq (R^{-1} \circ R)[Y].$$

2.12. Nech $X \subseteq A$ a $Y \subseteq B$ sú konečné množiny.

(i) Koľko je binárnych relácií R z A do B takých, že $R[X] \subseteq Y$?
(ii) Koľko je binárnych relácií R z A do B takých, že $R[X] \supseteq Y$?
(iii) Koľko je binárnych relácií R z A do B takých, že $R[X] = Y$?

Návod. Využite vetu 2.4.3.

2.13. Nech A, B, X, Y sú množiny také, že $X \subseteq A$ a $Y \subseteq B$. Dokážte, že pre ľubovolnú binárnu reláciu R z A do B platí:

$$R^{-1}[Y] \subseteq X \leftrightarrow R \cap (\overline{X} \times Y) = \emptyset$$
$$R^{-1}[Y] \supseteq X \leftrightarrow \operatorname{dom}\big(R \cap (X \times Y)\big) = X$$
$$R^{-1}[Y] = X \leftrightarrow R \cap (\overline{X} \times Y) = \emptyset \wedge \operatorname{dom}\big(R \cap (X \times Y)\big) = X.$$

Návod. Využite vetu 2.4.3 a výsledky cvičení 2.6-2.8 týkajúcich sa vlastností opačnej relácie.

2.14. Nech $X \subseteq A$ a $Y \subseteq B$ sú konečné množiny.

(i) Koľko je binárnych relácií R z A do B takých, že $R^{-1}[Y] \subseteq X$?
(ii) Koľko je binárnych relácií R z A do B takých, že $R^{-1}[Y] = X$?
(iii) Koľko je binárnych relácií R z A do B takých, že $R^{-1}[Y] \supseteq X$?

Návod. Využite vetu 2.4.3 a výsledky predchádzajúceho cvičenia.

Všade definované relácie

2.15. Nech $X \subseteq A$ a $Y \subseteq B$ sú konečné množiny.

(i) Koľko je všade definovaných relácií R z A do B takých, že $R[X] \subseteq Y$?
(ii) Koľko je všade definovaných relácií R z A do B takých, že $R[X] \supseteq Y$?
(iii) Koľko je všade definovaných relácií R z A do B takých, že $R[X] = Y$?

Návod. Využite vety 2.4.3 a 2.5.3.

2.16. Nech $X \subseteq A$ a $Y \subseteq B$ sú konečné množiny.

(i) Koľko je všade definovaných relácií R z A do B takých, že $R^{-1}[Y] \subseteq X$?
(ii) Koľko je všade definovaných relácií R z A do B takých, že $R^{-1}[Y] \supseteq X$?
(iii) Koľko je všade definovaných relácií R z A do B takých, že $R^{-1}[Y] = X$?

Návod. Využite vetu 2.5.3 a výsledky cvičenia 2.13.

Jednoznačné relácie

2.17. Nech $X \subseteq A$ a $Y \subseteq B$ sú konečné množiny.

(i) Koľko je jednoznačných relácií R z A do B takých, že $R[X] \subseteq Y$?
(ii) Koľko je jednoznačných relácií R z A do B takých, že $R[X] = Y$?
(iii) Koľko je jednoznačných relácií R z A do B takých, že $R[X] \supseteq Y$?

Návod. Využite vety 2.4.3 a 2.6.3.

2.18. Nech $X \subseteq A$ a $Y \subseteq B$ sú konečné množiny.

(i) Koľko je jednoznačných relácií R z A do B takých, že $R^{-1}[Y] \subseteq X$?
(ii) Koľko je jednoznačných relácií R z A do B takých, že $R^{-1}[Y] = X$?
(iii) Koľko je jednoznačných relácií R z A do B takých, že $R^{-1}[Y] \supseteq X$?

Návod. Využite vetu 2.6.3 a výsledky predchádzajúceho cvičenia.