5.2 Celočíselná odmocnina a trojuholníkové čísla

5.2.1 Celočíselná odmocnina. Zápis $\lfloor\sqrt{x}\rfloor$ označuje celočíselnú odmocninu prirodzeného čísla x. Je to funkcia na $\mathbb{N}$ definovaná predpisom:

$$\lfloor\sqrt{x}\rfloor = y \leftrightarrow y^2 \leq x < (y+1)^2. \tag{1}$$

Podmienka jednoznačnosti pre definíciu (1):

$$y_1^2 \leq x < (y_1+1)^2 \wedge y_2^2 \leq x < (y_2+1)^2 \rightarrow y_1 = y_2$$

je dôsledok tejto monotónnej vlastnosti štvorcov prirodzených čísel:

$$y_1 < y_2 \rightarrow y_1^2 < (y_1+1)^2 \leq y_2^2 < (y_2+1)^2.$$

Existenčná podmienka pre definíciu (1):

$$\forall x \exists y\, y^2 \leq x < (y+1)^2$$

plynie z faktu, že funkcia $\lambda x.x^2$ na $\mathbb{N}$ má neohraničený obor hodnôt obsahujúci číslo 0.

5.2.2 Trojuholníkové čísla. Zápis T_n označuje funkciu na $\mathbb{N}$, ktorej hodnoty sú trojuholníkové čísla:

$$\mathrm{T}_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n.$$

Nasledujúca vlastnosť trojuholníkových čísel sa dokáže matematickou indukciou

$$8\mathrm{T}_n + 1 = (2n+1)^2. \tag{1}$$

5.2.3 Pravá inverzná funkcia. Zápis T_m^{-1} označuje pravú inverznú funkciu k T_n:

$$\mathrm{T}_m^{-1} = n \leftrightarrow \mathrm{T}_n \leq m < \mathrm{T}_{n+1}. \tag{1}$$

Podmienka jednoznačnosti pre definíciu (1):

$$\mathrm{T}_{n_1} \leq m < \mathrm{T}_{n_1+1} \wedge \mathrm{T}_{n_2} \leq m < \mathrm{T}_{n_2+1} \rightarrow n_1 = n_2$$

je dôsledok tejto monotónnej vlastnosti trojuholníkových čísel

$$n_1 < n_2 \rightarrow \mathrm{T}_{n_1} < \mathrm{T}_{n_1+1} \leq \mathrm{T}_{n_2} < \mathrm{T}_{n_2+1}.$$

Existenčná podmienka pre definíciu (1):

$$\forall m \exists n \, \mathrm{T}_n \leq m < \mathrm{T}_{n+1}$$

plynie z faktu, že obor hodnôt funkcie T_n je neohraničený obsahujúci číslo 0.

5.2.4 Explicitne vyjadrenie pravej inverznej funkcie. Teraz vyjadrime pravú inverznú funkciu k T_n s pomocou celočíselnej odmocniny. Postupnými úpravami dostávame

$$\begin{aligned}
&\mathrm{T}_n \leq m < \mathrm{T}_{n+1} \Rightarrow \\
&8\mathrm{T}_n + 1 \leq 8m + 1 < 8\mathrm{T}_{n+1} + 1 \overset{5.2.2(1)}{\Rightarrow} \\
&(2n+1)^2 \leq 8m + 1 < (2(n+1)+1)^2 = (2n+3)^2 \overset{5.2.1(1)}{\Rightarrow} \\
&2n + 1 \leq \left\lfloor \sqrt{8m+1} \right\rfloor \leq 2n + 2 \Rightarrow \\
&2n \leq \left\lfloor \sqrt{8m+1} \right\rfloor - 1 \leq 2n + 1 \Rightarrow \\
&n \leq \left\lfloor \frac{\left\lfloor \sqrt{8m+1} \right\rfloor - 1}{2} \right\rfloor \leq \left\lfloor \frac{2n+1}{2} \right\rfloor = n.
\end{aligned}$$

Platí preto

$$\mathrm{T}_m^{-1} = \left\lfloor \frac{\left\lfloor \sqrt{8m+1} \right\rfloor - 1}{2} \right\rfloor = \left(\left\lfloor \sqrt{8m+1} \right\rfloor - 1\right) \div 2.$$