5.1 Dolná a horná celá časť reálneho čísla

5.1.1 Dolná celá časť reálneho čísla. Zápis $\lfloor x \rfloor$ označuje dolnú celú časť reálneho čísla x. Je to funkcia z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{Z}$ definovaná predpisom

$$\forall x{\in}\mathbb{R} \forall n{\in}\mathbb{Z} \big(\lfloor x \rfloor = n \leftrightarrow n \leq x < n+1 \big). \tag{1}$$

Čiže $\lambda x.\lfloor x \rfloor : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ vyjadrené s pomocou Churchovej λ-notácie.

Podmienka jednoznačnosti pre túto definíciu plynie z tejto jednoduchej vlastnosti celých čísel:

$$m < n \to m < m+1 \leq n < n+1.$$

Existenčná podmienka je zas dôsledok tejto vlastnosti celých čísel:

množina $\mathbb{Z}$ je zdola neohraničená uzavretá podmnožina množiny $\mathbb{R}$.

Skutočne nech $x \in \mathbb{R}$. Potom celé číslo n definované predpisom

$$n = \max\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\}$$

spĺňa vzťah $n \leq x < n+1$. Toto je korektná definícia čísla n! Prečo?

5.1.2 Horná celá časť reálneho čísla. Zápis $\lceil x \rceil$ označuje hornú celú časť reálneho čísla x. Je to funkcia z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{Z}$ definovaná predpisom

$$\forall x{\in}\mathbb{R} \forall n{\in}\mathbb{Z} \big(\lceil x \rceil = n \leftrightarrow n-1 < x \leq n \big)$$

Čiže $\lambda x.\lceil x \rceil : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ vyjadrené s pomocou Churchovej λ-notácie.

Podmienka jednoznačnosti pre túto definíciu sa dokáže podobne ako pre predchádzajúcu funkciu. Existenčná podmienka je zas dôsledok tejto vlastnosti celých čísel:

množina $\mathbb{Z}$ je zhola neohraničená uzavretá podmnožina množiny $\mathbb{R}$.

Nech totiž $x \in \mathbb{R}$. Potom celé číslo n definované predpisom

$$n = \min\{n \in \mathbb{Z} \mid x \leq n\}$$

spĺňa vzťah $n-1 < x \leq n$. Toto je korektná definícia čísla n! Prečo?

5.1.3 Veta. *Nech $x \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{Z}$. Potom*

$$\lfloor x \rfloor \leq n \leftrightarrow x < n+1 \tag{1}$$
$$\lfloor x \rfloor < n \leftrightarrow x < n \tag{2}$$
$$\lfloor x \rfloor \geq n \leftrightarrow x \geq n \tag{3}$$
$$\lfloor x \rfloor > n \leftrightarrow x \geq n+1. \tag{4}$$

Dôkaz. (1): Nech $\lfloor x \rfloor \leq n$. Z definície $x < \lfloor x \rfloor + 1$ a preto $x < n + 1$. Predpokladajme teraz, že $x < n + 1$. Z definície $\lfloor x \rfloor \leq x$ a preto $\lfloor x \rfloor < n + 1$. Pretože $\lfloor x \rfloor$ a $n + 1$ sú celé čísla, platí $\lfloor x \rfloor \leq n$.

(2): Pretože $\lfloor x \rfloor$ a n sú celé čísla, tak postupnými úpravami dostaneme:

$$\lfloor x \rfloor < n \Leftrightarrow \lfloor x \rfloor \leq n - 1 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} x < n - 1 + 1 \Leftrightarrow x < n.$$

(3): Postupnými úpravami dostaneme:

$$\lfloor x \rfloor \geq n \Leftrightarrow \lfloor x \rfloor \not< n \overset{(2)}{\Leftrightarrow} x \not< n \Leftrightarrow x \geq n.$$

(4): Postupnými úpravami dostaneme:

$$\lfloor x \rfloor > n \Leftrightarrow \lfloor x \rfloor \not\leq n \overset{(1)}{\Leftrightarrow} x \not< n + 1 \Leftrightarrow x \geq n + 1. \qquad \square$$

5.1.4 Veta. *Nech $x \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{Z}$. Potom*

$$\begin{aligned}
\lceil x \rceil \leq n &\leftrightarrow x \leq n \\
\lceil x \rceil < n &\leftrightarrow x \leq n - 1 \\
\lceil x \rceil \geq n &\leftrightarrow x > n - 1 \\
\lceil x \rceil > n &\leftrightarrow x > n.
\end{aligned}$$

Dôkaz. Prenechávame čitateľovi ako cvičenie. □

5.1.5 Príklad. Platí

$$\forall x \in \mathbb{R} \big(\lfloor 7x \rfloor = 7\lfloor x \rfloor \leftrightarrow \exists n \in \mathbb{Z}\, n \leq x < n + 1/7 \big).$$

Dôkaz. Nech x je ľubovolné reálne číslo. Postupnými úpravami dostaneme

$$\begin{aligned}
&\lfloor 7x \rfloor = 7\lfloor x \rfloor \Leftrightarrow 7\lfloor x \rfloor \leq 7x < 7\lfloor x \rfloor + 1 \Leftrightarrow \\
&\qquad \Leftrightarrow \lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1/7 \overset{(*)}{\Leftrightarrow} \exists n \in \mathbb{Z}\, n \leq x < n + 1/7.
\end{aligned}$$

Ekvivalencia $(*)$ plynie z nasledujúcej jednoduchej úvahy. Ak $n \in \mathbb{Z}$, potom

$$n \leq x < n + 1/7 \Rightarrow n \leq x < n + 1 \Rightarrow n = \lfloor x \rfloor. \qquad \square$$