

## Cvičenia

### *Dolná a horná celá časť reálneho čísla*

**5.1.** Rozhodnite pre ktoré reálne čísla  $x$  platia nasledujúce vzťahy:

- (i)  $\lfloor x \rfloor = x$ ,
- (ii)  $\lceil x \rceil = x$ ,
- (iii)  $\lfloor x \rfloor = \lceil x \rceil$ ,
- (iv)  $\lfloor x \rfloor + 1 = \lceil x \rceil$ .

**5.2.** Nech  $x$  je reálne číslo. Dokážte, že platí

$$\begin{aligned} \lfloor x \rfloor &\leq \lceil x \rceil \leq \lfloor x \rfloor + 1 \\ \lceil x \rceil - 1 &\leq \lfloor x \rfloor \leq \lceil x \rceil. \end{aligned}$$

Nájdite príklady reálnych čísel, pre ktoré sa nerovnosti zmenia v rovnosť.

**5.3.** Nech  $n \in \mathbb{Z}$ . Nájdite všetky reálne čísla  $x$  také, že platí

- (i)  $\lfloor x + n \rfloor = x + n$ ,
- (ii)  $\lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$ ,
- (iii)  $\lceil x + n \rceil = x + n$ ,
- (iv)  $\lceil x + n \rceil = \lceil x \rceil + n$ .

**5.4.** Nech  $x, y$  sú reálne čísla. Dokážte, že platí

$$\begin{aligned} \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor &\leq \lfloor x + y \rfloor < \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 2 \\ \lceil x \rceil + \lceil y \rceil - 2 &< \lceil x + y \rceil \leq \lceil x \rceil + \lceil y \rceil. \end{aligned}$$

Nájdite príklady reálnych čísel, pre ktoré sa neostre nerovnosti zmenia v rovnosť. Ukážte tiež, že odhady z ostrými nerovnosťami sa nedajú zlepšiť.

**5.5.** Nech  $n \in \mathbb{Z}$ . Nájdite všetky reálne čísla  $x$  také, že platí

- (i)  $\lfloor nx \rfloor = nx$ ,
- (ii)  $\lfloor nx \rfloor = n\lfloor x \rfloor$ ,
- (iii)  $\lceil nx \rceil = nx$ ,
- (iv)  $\lceil nx \rceil = n\lceil x \rceil$ .

**5.6.** Nech  $x, y$  sú reálne čísla a nech  $n \geq 1$  je celé číslo. Dokážte, že platí

$$\begin{aligned} n\lfloor x \rfloor &\leq \lfloor nx \rfloor < n\lfloor x \rfloor + n \\ n\lceil x \rceil - n &< \lceil nx \rceil \leq n\lceil x \rceil. \end{aligned}$$

Nájdite príklady čísel, pre ktoré sa neostre nerovnosti zmenia v rovnosť. Ukážte tiež, že odhady z ostrými nerovnosťami sa nedajú zlepšiť.

**5.7.** Nech  $x, y$  sú reálne čísla a nech  $n \leq -1$  je celé číslo. Dokážte, že platí

$$\begin{aligned}n\lceil x \rceil &\leq \lfloor nx \rfloor < n\lfloor x \rfloor - n \\n\lfloor x \rfloor + n &< \lceil nx \rceil \leq n\lceil x \rceil.\end{aligned}$$

Nájdite príklady čísel, pre ktoré sa neostre nerovnosti zmenia v rovnosť. Ukážte tiež, že odhady z ostrými nerovnosťami sa nedajú zlepšiť.

**5.8.** Nech  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  je spojitá a ostro rastúca reálna funkcia:

$$\forall x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} (x < y \rightarrow f(x) < f(y)).$$

Nech ďalej

$$\forall x \in \mathbb{R} (f(x) \in \mathbb{Z} \rightarrow x \in \mathbb{Z}).$$

Dokážte, že pre všetky reálne čísla  $x$  platí

$$\begin{aligned}\lfloor f(\lfloor x \rfloor) \rfloor &= \lfloor f(x) \rfloor \\ \lceil f(\lceil x \rceil) \rceil &= \lceil f(x) \rceil.\end{aligned}$$

**5.9.** Nech  $x \in \mathbb{R}$ ,  $m, n \in \mathbb{Z}$  a  $n \neq 0$ . Dokážte, že platí

$$\begin{aligned}\left\lfloor \frac{\lfloor x \rfloor + m}{n} \right\rfloor &= \left\lfloor \frac{x + m}{n} \right\rfloor \\ \left\lceil \frac{\lceil x \rceil + m}{n} \right\rceil &= \left\lceil \frac{x + m}{n} \right\rceil.\end{aligned}$$

*Návod.* Využite predchádzajúce cvičenie.

### Špeciálne funkcie

**5.10.** Nech  $A = \{1, \dots, m\}$  a  $B = \{1, \dots, n\}$  Funkcia  $f : A \rightarrow B$  je monotónne rastúca, ak

$$\forall i \forall j (1 \leq i < j \leq m \rightarrow f(i) \leq f(j)).$$

- (i) Koľko je monotónne rastúcich funkcií z  $A$  do  $B$ ?
- (ii) Nech  $1 \leq k \leq m$  a  $1 \leq l \leq n$ . Koľko je monotónne rastúcich funkcií z  $A$  do  $B$  takých, že  $f(k) = l$ ?
- (iii) Nech  $1 \leq k \leq m$  a  $1 \leq l \leq n$ . Koľko je monotónne rastúcich funkcií z  $A$  do  $B$  takých, že  $f^{-1}(\{l\}) = \{k\}$ ?