5.3 Cantorova párovacia funkcia

5.3.1 Cantorova párovacia funkcia. Injekcie z $\mathbb{N}^2$ do $\mathbb{N}$ sa nazývajú párovacie funkcie. Jednou z najjednoduchších surjektívnych párovacích funkcií je Cantorova párovacia funkcia J, ktorá je zobrazená na obrázku:

$J(x,y)$	0	1	2	3	4	5	6	$\cdots$
0	0	1	3	6	10	15	21	$\cdots$
1	2	4	7	11	16	22	29	$\cdots$
2	5	8	12	17	23	30	38	$\cdots$
3	9	13	18	24	31	39	48	$\cdots$
4	14	19	25	32	40	49	59	$\cdots$
5	20	26	33	41	50	60	71	$\cdots$
6	27	34	42	51	61	72	84	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

Funkcia je definovaná vzťahom:

$$\mathrm{J}(x,y) = \Big|\big\{(a,b) \in \mathbb{N}^2 \mid a+b < x+y \vee a+b = x+y \wedge a < x\big\}\Big|. \tag{1}$$

Aby sme našli jej numerické vyjadrenie, využijeme nasledujúce identity, ktoré plynú priamo z definície (1):

$$\mathrm{J}(x,y) = \mathrm{J}(0,x+y) + x \tag{2}$$

$$\mathrm{J}(0,x+y) = \Big|\big\{(a,b) \in \mathbb{N}^2 \mid a+b < x+y\big\}\Big|. \tag{3}$$

Postupnými úpravami teraz dostaneme:

$$\begin{aligned}\mathrm{J}(x,y) &\overset{(2)}{=} \mathrm{J}(0,x+y) + x \overset{(3)}{=} \Big|\big\{(a,b) \in \mathbb{N}^2 \mid a+b < x+y\big\}\Big| + x = \\ &= \sum_{d<x+y} \Big|\big\{(a,b) \in \mathbb{N}^2 \mid a+b = d\big\}\Big| + x = \sum_{d<x+y} (d+1) + x = \\ &= \sum_{d \le x+y} d + x = \mathrm{T}_{x+y} + x.\end{aligned}$$

Preto

$$\mathrm{J}(x,y) = \sum_{i=0}^{x+y} i + x = \mathrm{T}_{x+y} + x. \tag{4}$$

5.3.2 Diagonálna vlastnosť. Platí

$$\mathrm{T}^{-1}_{\mathrm{J}(x,y)} = x + y. \tag{1}$$

Dôkaz. Z nasledujúcich úprav

$$\begin{aligned} \mathrm{T}_{x+y} = \mathrm{T}_{0+x+y} + 0 &\overset{5.3.1(4)}{=} \mathrm{J}(0, x+y) \overset{5.3.1(2)}{\leq} \mathrm{J}(x,y) \overset{5.3.1(1)}{<} \\ &< \mathrm{J}(0, x+y+1) \overset{5.3.1(4)}{=} \mathrm{T}_{0+x+y+1} + 0 = \mathrm{T}_{x+y+1} \end{aligned}$$

plynie nerovnosť

$$\mathrm{T}_{x+y} \leq \mathrm{J}(x,y) < \mathrm{T}_{x+y+1}.$$

Odtiaľ a z 5.2.3(1) dostaneme požadovanú identitu (1). □

5.3.3 Projekcie. Prvá a druhá projekcia Cantorovej párovacej funkcie sú unárne funkcie K a L také, že

$$\mathrm{K}(0) = 0 \tag{1}$$
$$\mathrm{KJ}(x,y) = x \tag{2}$$
$$\mathrm{L}(0) = 0 \tag{3}$$
$$\mathrm{LJ}(x,y) = y. \tag{4}$$

Funkcie definujeme explicitne vzťahom

$$\begin{aligned} \mathrm{K}(x) &= x - \mathrm{J}\big(0, \mathrm{T}_x^{-1}\big) \\ \mathrm{L}(x) &= \mathrm{T}_x^{-1} - \mathrm{K}(x). \end{aligned}$$

Dôkaz. Postupnými úpravami dostaneme:

$$\begin{aligned} \mathrm{K}\,\mathrm{J}(x,y) &= \mathrm{J}(x,y) - \mathrm{J}\big(0, \mathrm{T}^{-1}_{\mathrm{J}(x,y)}\big) \overset{5.3.2(1)}{=} \mathrm{J}(x,y) - \mathrm{J}(0, x+y) \overset{5.3.1(2)}{=} \\ &= \mathrm{J}(0, x+y) + x - \mathrm{J}(0, x+y) = x \\ \mathrm{L}\,\mathrm{J}(x,y) &= \mathrm{T}^{-1}_{\mathrm{J}(x,y)} - \mathrm{K}\,\mathrm{J}(x,y) \overset{5.3.2(1),(2)}{=} x + y - x = y. \end{aligned}$$

Dôkaz zvyšných vlastností prenechávame čitateľovi. □